

# Análise de Simetrias de Equações Diferenciais Ordinárias via Teoria de Grupos e Álgebra de Lie

Ester Mabel de Oliveira Vieira<sup>1</sup>; Marilyn da Rocha Campos<sup>2</sup>; Israel Almeida Lopes<sup>3</sup>; Ronaldo Thibes<sup>4</sup>

## RESUMO

Fizemos uma análise das formas de resolução de Equações Diferenciais consideradas mais simples, como pelo método do fator integrante; por variáveis separáveis; Equações Diferenciais exatas; e as homogêneas. Em seguida iniciamos o estudo do método das simetrias de Lie, conceituando transformações de Lie e analisando correspondentes simetrias. A análise de simetrias em equações diferenciais se mostra extremamente útil não somente para uma melhor visão qualitativa dos fenômenos envolvidos como para desenvolver métodos de solução que não sejam meramente numéricos. Vimos no presente trabalho como as simetrias podem ser identificadas numa equação diferencial não-linear associada à cinética de reações.

**PALAVRAS-CHAVE:** Equações Diferenciais Ordinárias, Simetrias de Lie, Transformações de Lie.

## ANALYSIS OF SYMMETRIES OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS VIA GROUP THEORY AND LIE ALGEBRA

### ABSTRACT

We analyzed the ways of solving Differential Equations considered simpler, such as using the integrating factor method; by separable variables; Exact Differential Equations; and homogeneous ones. Next, we begin the study of the Lie symmetry method, conceptualizing Lie transformations and analyzing corresponding symmetries. The analysis of symmetries in differential equations proves to be extremely useful not only for a better qualitative view of the phenomena involved but also for developing solution methods that are not merely numerical. We saw in the present work how symmetries can be identified in a non-linear differential equation associated with reaction kinetics

---

1 Graduanda em Engenharia de Alimentos, bolsista da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.

2 Graduada em Matemática; Universidade Estadual Sudoeste da Bahia.

3 Graduando em Física, bolsista da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia.

4 Graduado em Física; Universidade Estadual Sudoeste da Bahia.

**KEYWORDS:** Ordinary Differential Equations, Lie Symmetries, Lie Transformations.

## INTRODUÇÃO

As equações diferenciais possuem uma longa história própria, tendo surgido desde os primórdios do cálculo diferencial e integral com importantes e bem-sucedidas aplicações na ciência como um todo, possuindo como objetivo inicial a descrição de funções e variáveis reais contínuas interrelacionadas com suas taxas de variação.

As transformações de simetria por trás de uma equação diferencial ordinária não-linear associada à cinética enzimática em processos alimentícios, buscando resgatar significados e relações matemáticas entre as grandezas envolvidas. A ideia de simetria como invariância frente a uma dada transformação, tanto na natureza quanto na matemática, se apresenta sob distintos aspectos. É importante lembrar o caso emblemático na física fundamental que associa simetrias contínuas às leis de conservação da natureza, descrito pelo famoso teorema de Noether (NOETHER, 1918; LEMOS, 2018).

Desse modo, as simetrias de Lie são uma ferramenta poderosa para entender a natureza e a estrutura dos sistemas físicos e matemáticos. Portanto, objetivo do trabalho é a análise de simetrias de equações diferenciais ordinárias via teoria de grupos e álgebra de lie.

## MATERIAIS E MÉTODOS

Revisamos as equações diferenciais ordinárias pelo método integrante. Conceituamos simetria de maneira geral via teoria de grupos de transformações. Revisamos os conceitos de grupos e álgebras de Lie. Procuramos soluções de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não lineares via investigação de Simetrias de Lie, finitas e infinitesimais. Usamos as equações diferenciais ordinárias por meio de uma equação cinética enzimática na área da engenharia de alimentos por meio da teoria dos grupos (GARCIA; LEQUAIN, 2022) e (ARRIGO, 2015), o que nos fornecerá um método propício para a análise de simetrias presentes na descrição de reações de cinética enzimática.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Verificamos simetrias de Lie associadas a equações diferenciais específicas, tanto em equações separáveis, exatas e homogêneas quanto em outras instâncias específicas de edos não-lineares que utilizamos na cinética enzimática. Analisamos também equações de Riccati e de Bernoulli à luz de suas simetrias. Aplicamos o método

das simetrias de Lie para a obtenção de soluções. Nesta seção, aplicamos os conceitos de simetria e teoria dos grupos desenvolvidos anteriormente diretamente a uma equação diferencial não-linear associada à cinética de reações enzimáticas para obtenção de nossos resultados. Simplesmente utilizamos uma equação da cinética enzimática e a transformamos em uma equação diferencial. Com isso, fizemos uma substituição e transformando em uma equação diferencial ordinária não linear. Ademais, utilizamos essa equação por meio das simetrias discretas e resolvemos por meio do fator integrante.

## CONCLUSÕES

A análise de simetrias em equações diferenciais se mostra extremamente útil não somente para uma melhor visão qualitativa dos fenômenos envolvidos como para desenvolver métodos de solução que não sejam meramente numéricos. Vimos no presente trabalho como as simetrias podem ser identificadas numa equação diferencial não-linear associada à cinética de reações. Além disso, observamos que a aplicação do método de simetrias a outras equações diferenciais de engenharia de alimentos encontra-se atualmente sob análise em nosso grupo de pesquisa.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ARRIGO, J. D. **Symmetry Analysis of Differential Equations**, 1. ed. Canada: Wiley, 2015, 193p.
2. GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. **Elementos de Álgebra**, 7. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2022, 280p.
3. LEMOS, N. **Analytical Mechanics**, 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2018, 471p.
4. NOETHER, E.; Invariante Variationsprobleme, Nachr. Gesell. Wissenschaft. Göttinger 2, p. 235, 1918.