PONTO CRÍTICO E CONVEXIDADE: UM RELACIONAMENTO ÓTIMO[1]

Nalanda Moreira Nascimento [2], Teles Araújo Fernandes[3]

RESUMO

Neste trabalho, fizemos um estudo introdutório sobre Otimização Contínua, mais especificamente sobre o Método do Gradiente. Aplicamos este método com a finalidade de encontrar o ponto crítico de uma função acadêmica. Embora o Método do Gradiente não identifique se um ponto crítico é um extremo da função estudada, neste trabalho, provamos que o ponto crítico obtido é o minimizador global da função.

PALAVRAS-CHAVE: Método do Gradiente, Minimizador Global, Otimização Contínua, Ponto Crítico.

CRITICAL POINT AND CONVEXITY: AN OPTIMAL RELATIONSHIP

ABSTRACT

In this work, we study Continuous Optimization, more specifically, the Gradient Method. We apply this method in order to find the critical point of an academic function. Furthermore, although the method does not identify whether the critical point is an extreme of the objective function, we prove it is the global minimizer of the function.

KEYWORDS: Continuous Optimization, Critical point, Gradient Method, Global Minimizer.

1 Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB
2 Licencianda em Matemática, UESB, Avenida José Moreira Sobrinho - Jequiezinho, Jequié-BA, 45205-490.
3 Professor Adjunto, UESB, Departamento de Ciências e Tecnologias - DCT, Avenida José Moreira Sobrinho - Jequiezinho, Jequié-BA, 45205-490.

INTRODUÇÃO:

A Otimização Contínua preocupa-se com o desenvolvimento de teorias que contribuam para melhorias em métodos iterativos. Tais métodos visam solucionar diversos problemas envolvendo a maximização ou minimização de funções contínuas modeladas matematicamente a partir de problemas encontrados nas ciências físicas, econômicas e de gestão, na pesquisa operacional, nas indústrias, nas engenharias aeroespacial, mecânica, elétrica, química etc. veja [4,5]. Alguns métodos de otimização mais conhecidos são o Método de Newton, Método quase-Newton, Método de região de confiança, Método do Gradiente, veja [1,2].

O objeto de estudo deste trabalho é o Método do Gradiente, utilizado para determinar pontos críticos de funções diferenciáveis a fim de minimizá-las. Este método gera uma sequência da seguinte forma: dada a iterada inicial, a partir deste ponto e na direção oposta ao vetor gradiente da função estudada obtem-se a próxima iterada e assim sucessivamente. A sequência assim gerada, converge para um ponto crítico da função objetivo. Aplicamos este método em uma função real definida no plano e obtivemos o ponto crítico em apenas três iteradas. Apesar do método não garantir que este ponto crítico é um extremo da função, utilizando convexidade, provamos que tal ponto é o minimizador global. No restante deste trabalho apresentamos o Desenvolvimento e a Conclusão.

DESENVOLVIMENTO:

Nesta seção, apresentamos o Método do Gradiente. Observamos que para o estudo deste método foi necessário estudar conceitos básicos de Análise Matemática no espaço n-dimensional. Para isso, utilizamos [3]. O que segue descreve formalmente o Método do Gradiente.

Algoritmo 1: Método do Gradiente

1. Dado $p_0 \in \mathbb{R}^n$, $k = 0$

   REPETIR ENQUANTO $\nabla f(p_k) \neq 0$

2. Defina $d_k = -\nabla f(p_k)$
3. Obtenha $t_k > 0; f(p_k + t_k d_k) < f(p_k)$
4. Faça $p_{k+1} = p_k + t_k d_k$
5. $k = k + 1$

Note que, inicialmente, escolhemos um ponto arbitrário $p_0 \in \mathbb{R}^n$. Se $\nabla f(p_0) = 0$, o Algoritmo para, caso contrário, seguimos para o **passo 2** e definimos a direção de descida $d_0 = -\nabla f(p_0)$. No **passo 3** selecionamos um parâmetro $t_0 \in \mathbb{R}$ dado pela busca de Armijo, veja [1]. Assim, no **passo 4** definimos $p_1 = p_0 + t_0 d_0$. Destacamos que este algoritmo gera uma sequência que converge para um ponto crítico da função estudada, veja [2]. Formalmente, temos:

Teorema 1. *O Algoritmo 1, com o tamanho do passo calculado pela Busca de Armijo gera uma sequência tal que todo ponto de acumulação é um ponto crítico da função estudada.*

Exemplo 1. Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = (x - 2)^2/2 + (y - 1)^2. \tag{1}$$

Tomamos $p_0 = (0; 2)$. Verificamos que $\nabla f(p_0) = (-2; 2)$. Portanto, definimos $d_0 = -\nabla f\,(0;\ 2) = (2;\ -2)$. Para obtermos o tamanho do passo t_0, utilizamos a Busca de Armijo dada por

$$f(\bar{p} + td) \leq f(\bar{p}) + \eta t\langle \nabla f(\bar{p}), \bar{d}\rangle,\ \forall t \in [0, \delta), \eta \in (0, 1). \tag{2}$$

Fazendo $p_0 = (0;\ 2)$, $d_0 = -\nabla f\,(0;\ 2) = (2;\ -2)$ e $\eta = 1/2$, por (2) obtemos $t_0 = 1/2$. Assim, temos $p_1 = (0;\ 2) + 1/2(2;\ -2) = (1;\ 1)$. Observamos que $\nabla f\,(p_1) = (-1;\ 0) \neq 0$. De forma análoga à obtenção de p_1, determinamos as próximas iteradas. A Tabela 1 apresenta

k	x_k	d_k	t_k	$\nabla f(x_k)$
0	(0; 2)	(2; −2)	1/2	(−2; 2)
1	(1; 1)	(1; 0)	1	(−1; 0)
2	**(2;1)**	**(0;0)**	**1**	**(0;0)**

TABELA 1: Iteradas do Método do Gradiente para $f(x, y) = (x - 2)^2/2 + (y - 1)^2$.

k, x_k, d_k e t_k, que são respectivamente, o índice da iterada, o termo da sequência, o negativo do gradiente e o tamanho do passo na k-ésima iterada.

O Método do Gradiente não determina se um ponto crítico é um extremo da função. Contudo, provamos que tal ponto é mínimo global. Para isso, utilizamos a definição de convexidade de uma função e o seguinte lema:

Lema 1. *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo e $f : C \to \mathbb{R}$ uma função convexa e diferenciável. Considere $\bar{x} \in C$. Se $\langle \nabla f(\bar{x}), (y - \bar{x})\rangle \geq 0$, $\forall y \in C$, então $\bar{x}$ é minimizador global de f. Em particular, todo ponto crítico é minimizador global.*

A Figura 1, apresenta o ponto de mínimo global da função dada em (1).

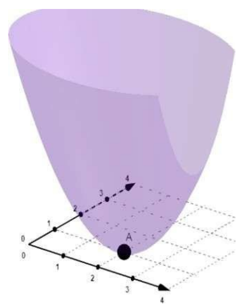

FIGURA 1: Ponto A, minimizador global de $f(x, y) = (x - 2)^2/2 + (y - 1)^2$.

CONCLUSÃO:

Neste trabalho, estudamos o Método do Gradiente. Tal método gera uma sequência que converge para um ponto crítico da função analisada. Aplicamos este método para minimizar uma função real definida no plano, o que nos possibilitou uma melhor visualização do comportamento do método. Além disso, observamos que não é assegurado que o ponto de convergência da sequência gerada pelo Algoritmo (1) seja um extremo da função. Contudo, usamos convexidade e provamos que o ponto crítico encontrado é o minimizador global da função objetivo.

REFERÊNCIAS:

[1] DENNIS JR, John E.; SCHNABEL, Robert B. Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996.

[2] KARAS, Elizabeth Wegner; RIBEIRO, Ademir Alves. Um curso de Otimizaçao. Notas de aula, UFPR, Curitiba, Brasil, 2010.

[3] LIMA, Elon Lages. Curso de Análise, vol. 2, Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[4] NOCEDAL, J. / WRIGHT, S.J., Numerical Optimization, Springer Verlag, New York, 1999.

[5] S. S. Rao. Engineering Optimization: Theory and Practice. Fourth Edition. John Wiley, 2009.