

ESTUDO PRÁTICO DO PÊNDBULO AMORTECIDO FORÇADO POR MEIO DO SOFTWARE MAXIMA¹

Marlon Christman Araujo Ribeiro², Luizdarcy de Matos Castos³

RESUMO

Os sistemas dinâmicos trata-se da variação temporal de grandezas que caracterizam o sistema, sendo possível descrever tal comportamento por meio de um ferramental matemático útil para atender diversos campos de estudo, como por exemplo nas ciências exatas, naturais, economia etc. O sistema dinâmico, muitas vezes, possui um complexibilidade no seu estudo, exigindo um mecanismo que apoie na resolução de equações complicadas, para isso, vem os computadores. O uso de sistemas computacionais, nas pesquisas e estudos nas ciências exatas, adicionou recursos para as resoluções de problemas matemáticos e empíricos. Com isso, neste trabalho de iniciação científica, foi estudado sistemas dinâmicos utilizando o Maxima, um dos sistemas algébricos computacionais que nos permite resolver equações por métodos numéricos, fazer representação gráfica e diversos tratamentos algébricos. Dessa forma, tem como objetivo analisar a utilização dos recursos do Maxima no estudo sistemas dinâmicos e suas possíveis aplicações em tal campo de estudo. A pesquisa foi realizada com livros e artigos disponíveis na internet e a utilização do software Maxima, de licença gratuita, a partir dos estudos de J.E. Villate. A finalidade é observar a praticidade e eficiência oferecida no estudo de sistemas dinâmicos pelo Maxima e suporte computacional para realização de aplicações em sistemas físicos.

PALAVRAS-CHAVE: Sistemas dinâmicos, Maxima, Sistemas Computacionais.

PRACTICAL STUDY OF THE FORCED DAMPED PENDULUM USING MAXIMA SOFTWARE

ABSTRACT

Dynamic systems are about the temporal variation of quantities that characterize the system, and it is possible to describe this behaviour using a mathematical tool that is useful in various fields of study, such as the exact sciences, natural sciences, economics etc. Dynamic systems are often complex to study and require a mechanism to help solve complicated equations, which is why computers come into play. The use of computer systems in research and studies in the exact sciences has added resources for solving mathematical and empirical problems. With this in mind, in this scientific initiation project, we studied dynamic systems using Maxima, one of the algebraic computer systems that allows us to solve equations using numerical methods, graphing and various algebraic treatments. The aim of this study is to analyze the use of Maxima's resources in the study of dynamic systems and its possible applications in this field of study. The research will

¹ Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

² Bolsista de iniciação científica- Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

³ Professor orientador-Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - DCET

be carried out using books and articles available on the Internet and the use of Maxima software, licensed free of charge, based on the studies of J.E. Villate. The aim is to observe the practicality and efficiency offered by Maxima in the study of dynamic systems and the computational support for applications in physical systems

KEYWORDS: Dynamical systems, Maxima, Computational systems.

INTRODUÇÃO

O conceito de sistema dinâmico apresentou-se durante os séculos em diversos estudos, sendo Aristóteles (384-322 a.C) grande conhecido e pioneiro no estudo do movimento de corpos que por definição se caracteriza um sistema dinâmico, ou seja, sistemas em que as grandezas que os caracterizam variam com tempo (MONTEIRO, 2002). Os sistemas dinâmicos possuem uma extensão teórica que vai de sistemas com caráter fundamental e previsível, como queda livre e lançamento oblíquo, até mais complexos e imprevisíveis, como o movimento convectivo dos fluídos.

Com o desenvolvimento dos computadores e da sua capacidade de processamento vários softwares que objetivavam resolver problemas matemáticos surgiram e dentre eles o Máxima. O Maxima é um pacote de software livre e seu sítio da Web é <http://maxima.sourceforge.net>. O supracitado software possui linguagem simples, dispensando que o usuário construa uma biblioteca. Dessa forma, para estudar sistemas dinâmicos numa forma ativa, ou seja, nosso interesse está voltado para as numerosas aplicações que o estudo teórico-computacional dos sistemas dinâmicos nos propicia.

Os sistemas dinâmicos são bastantes apreciados no estudo de matemáticos e físicos, mas apresenta-se para outros estudiosos de outras áreas, como biologia, economia etc. Por ser vasto, o estudo introdutório para compreensão dos conceitos precisa ser delimitado em sistemas clássicos apresentados na literatura. Para isso, neste trabalho é apresentado o pêndulo amortecido forçado, um sistema que abrange diversos conceitos de sistemas dinâmicos. Dessa forma, é possível conhecer a riqueza e o comportamento do sistema dinâmico e como pode se ramificar em outros sistemas que utilizam a teoria do caos, ou seja, sistemas apresentem uma sensibilidade das condições iniciais.

Materiais e Métodos

Para realização do estudo do pêndulo amortecido forçado (PAF), utilizamos o software Maxima como ferramenta computacional para analisar o comportamento do sistema ao alterar seus parâmetros.

As equações diferenciais que descrevem o estado do pêndulo amortecido forçado são dadas por:

$$\ddot{\theta} = \omega; \dot{\omega} = -C_1 \sin \theta + C_2 \cos \phi - C_3 \omega; \dot{\phi} = k$$

Equação 1: Conjunto de equações diferenciais de estado do PAF

Das leis da dinâmica obtemos as equações acima com os parâmetros definidos como $C_1 = \frac{g}{l}$, $C_2 = \frac{aA}{ml}$ e $C_3 = \frac{Br}{ml}$, pode-se notar a dependência do comprimento l e da gravidade g , além disso, as C_2 e C_3 estão associadas, respectivamente, a força externa senoidal e a força de resistência causado pelo ar aplicada no pêndulo.

Resolvemos o sistema de equações apresentado na equação 1 por meio do Maxima, usando o recurso já existente no software para resolução de equações diferenciais, a saber: o método numérico de Runge-Kutta.

A análise consiste nas variações dos valores dos três parâmetros que caracterizam as equações diferenciais e, por meio destas mudanças, é possível observar os efeitos causados nas mudanças das condições iniciais.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

O pêndulo amortecido forçado tem três parâmetros que o caracteriza. Por exemplo, caso $C_2 = 0$ e $C_3 = 0$, tomar o valor zero, o sistema torna-se um pêndulo simples e tem o comportamento facilmente previsível, mas caso apenas $C_2 = 0$ assumir o valor nulo, o sistema torna-se um pêndulo amortecido. Para uma situação em que os parâmetros tomem os seguintes valores hipotéticos: $C_1 = 1$, $C_2 = 0.8$ e $C_3 = \frac{1}{2}$ e $k = \frac{\pi}{5}$, o sistema torna-se um particular pêndulo amortecido forçado. Os valores adotados para o estudo servem apenas para análise do sistema, mas, se o objetivo fosse determinar valores reais, as seguintes considerações devem ser feitas: 1- A massa influencia diretamente na posição do centro de massa, 2- O comprimento l influencia no período de oscilação e 3- A constante B influencia diretamente na resistência provocada no pêndulo.

Em 500 interações com incremento de 0.05, é possível chegar na seguinte representação gráfica:

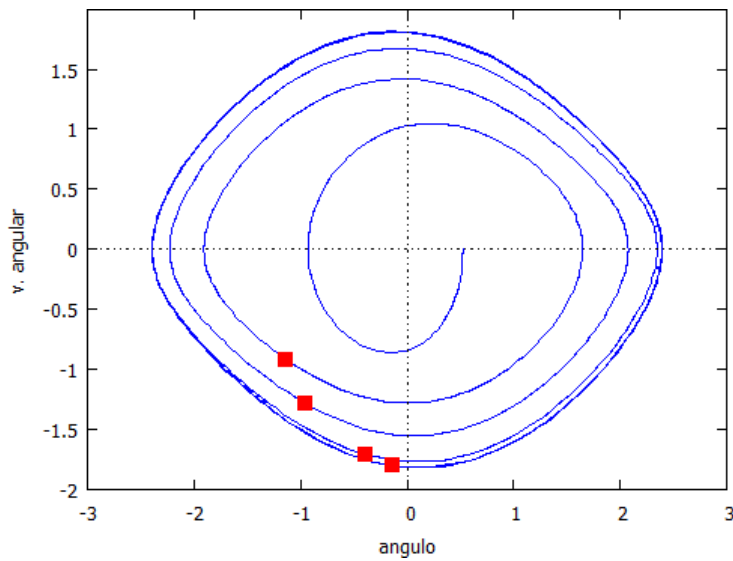


Figura 1: Gráfico ângulo versus velocidade angular

Na figura 1, com um tempo pequeno, nota que perde a estabilidade e decai a oscilação, indo para equilíbrio em zero. Mas se dobrar o período de observação, tem que, na figura 2 abaixo, um ciclo limite pelo resultado do pêndulo começa oscilar com mesmo período que a força externa, visto que é uma força que muda a forma senoidal e possui uma frequência $\frac{\pi}{5}$.

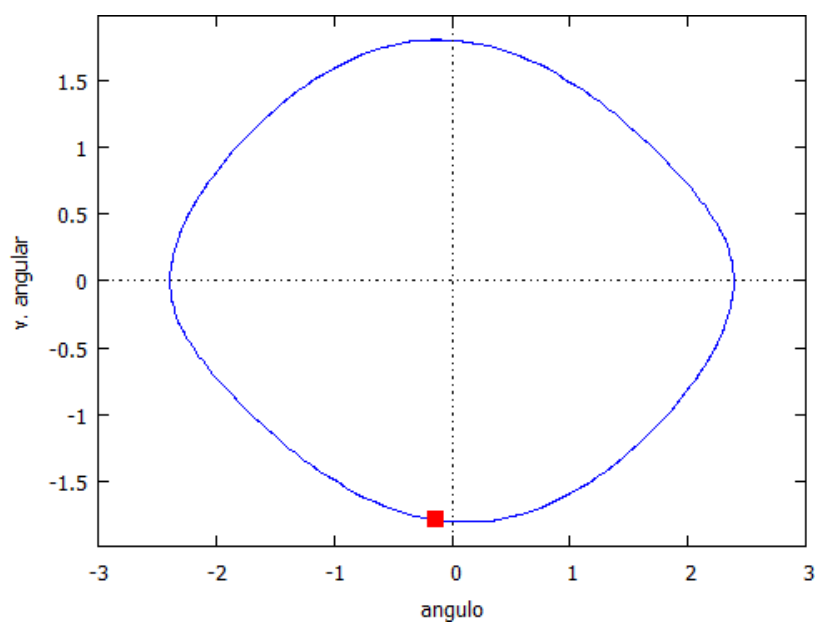


Figura 2: Gráfico ângulo versus velocidade angular – ciclo limite

Os sistemas dinâmicos, ao decorrer do tempo, apresentam comportamentos que modificam conforme sua configuração, sendo ela mais complexo como o pêndulo amortecido forçado. Vale ressaltar que a unidade de medida adotada para comprimento foi centímetro e para o tempo foi decisegundos, dessa forma, em um tempo muito curto, pode observar um resultado apreciativo em interações menores.

CONCLUSÃO E CONSIDERAÇÕES

Dentro os pontos fundamentais dos sistemas dinâmicos, é importante observar como a determinação da equação de movimento, das variáveis e dos parâmetros definem o comportamento do sistema físico observado, sendo que, ao aumentar o número de variáveis e parâmetros, a complexidade do sistema aumenta, sendo que, existe sensibilidade na alteração dos seus valores.

Por fim, o uso computacional contribuiu para o estudo do pêndulo amortecido forçado, pois foi possível a realização dos cálculos numéricos, tendo resultados aproximativos mais realistas, contribuindo no estudo do comportamento do sistema dinâmico. Além disso, devido a função gráfica do software, é possível produzir curvas que possibilita o estudo do comportamento do sistema e uma análise muito mais direta. Portanto, a adoção do software Maxima, foi vantajoso para a realização dos estudos.

Apesar dos conceitos básicos de sistemas dinâmicos serem estudados durante a graduação, o estudo introdutório de sistema dinâmico trouxe a oportunidade de aprofundar os conhecimentos na área e explorar novos conceitos do assunto.

Além disso, a oportunidade de trabalhar com recursos virtuais por meio do software Maxima foi uma oportunidade de conhecer uma nova ferramenta e agregou na minha formação pessoal, sendo um item crucial na vida acadêmico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] MONTEIRO, Luiz Henrique Alves. Sistemas Dinâmicos. São Paulo: Livraria da Física, 2002
- [2] TAYLOR, John R. Mecânica Clássica. Porto Alegre: Bookman, 2013
- [3] VILLATE, Jaime E. **Introdução aos sistemas dinâmicos: uma abordagem pratica com Maximas** , (2007) - disponível em https://villate.org/publications/Villate_2007_Sistemas_Dinamicos.pdf.

[4] VILLATE, Jaime E. **Métodos Numéricos**, Universidade do Porto, Portugal, (2015) - disponível em <https://villate.org/numericos/index.html>.

[5] VILLATE, Jaime E. **Dinâmica e Sistemas Dinâmicos**, Universidade do Porto, Portugal, 5ª edição, (2019) - disponível em <https://books.fe.up.pt/index.php/feup/catalog/view/978-972-99396-5-5/978-972-99396-5-5/114-1>.