fapesb
Fundação de Amparo
à Pesquisa do Estado da Bahia

SECRETARIA DE CIÊNCIA TECNOLOGIA
E INOVAÇÃO DO ESTADO DA BAHIA

Equações Diferenciais Ordinárias do tipo Bernoulli e Riccati: aspectos históricos, resoluções e aplicações[1]

Marilyn da Rocha Campos[2], Israel Almeida Lopes[3], Suzicleide Lopes de Oliveira[4], Ronaldo Thibes[5], Ester Mabel Oliveira Vieira[6]

RESUMO

Revisamos os conceitos de equações diferenciais ordinárias, álgebras de Lie e grupos de Lie. Efetuamos a aplicações de simetrias de Lie a sistemas de equações diferenciais ordinárias específicos oriundos de problemas da física teórica. Em particular estudamos em detalhes as equações diferenciais de Bernoulli e Riccati, incluindo também seus aspectos sociais, históricos e aplicações. Obtemos soluções de equações diferenciais ordinárias através da identificação de suas simetrias de Lie. Aplicamos a equação de Riccati na mecânica quântica supersimétrica onde utilizamos o conceito de superpotencial para fatorar a equação diferencial de Schrödinger, em princípio de segunda ordem, em duas equações diferenciais de primeira ordem.

PALAVRA CHAVE: Álgebra de Lie; Bernoulli; Equações Diferenciais Ordinárias; Riccati; Simetrias.

Bernoulli and Riccati Ordinary Differential Equations: historical aspects, resolutions and applications

ABSTRACT

We review the concepts of ordinary differential equations, Lie algebras and Lie groups. We apply Lie symmetries to specific ordinary differential equation systems arising from theoretical physics problems. In particular, we study in detail the differential equations of Bernoulli and Riccati, also including their social, historical and application aspects. We obtain solutions of ordinary differential equations by identifying their Lie symmetries. We apply the Riccati equation in supersymmetric quantum mechanics where we use the concept of superpotential to factor the Schrödinger differential equation, in second-order principle, into two first-order differential equations.

---

[1] Entidade Financiadora: Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia – FAPESB.
[2] Prof. Esp. da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB. Endereço: BR 415, Itapetinga - BA, 45700-000.
[3] Bolsista: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB. Endereço: BR 415, Itapetinga - BA, 45700-000.
[4] Prof. Ma. da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB. Endereço: BR 415, Itapetinga - BA, 45700-000.
[5] Orientador, Prof. Dr. da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB. Endereço: BR 415, Itapetinga - BA, 45700-000.
[6] Bolsista: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB. Endereço: BR 415, Itapetinga - BA, 45700-000.

KEYWORDS: Lie algebra; Bernoulli; Ordinary Differential Equations; Riccati; Symmetries.

INTRODUÇÃO

Nosso estudo tem por objetivo trazer um aspecto mais humanizado das equações diferenciais ordinárias do tipo Bernoulli e Riccati, todavia, sem deixar de lado as suas resoluções e aplicações. Após um estudo inicial de métodos de resolução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, fomos envolvido pela beleza das equações de Bernoulli e Ricatti bem como engenhosidade de suas soluções. Tal fato nos motivou a procurar os aspectos humanos, sociais e históricos por trás dessas equações. Estudamos as simetrias de tais equações geradas por transformações de Lie.

MATERIAL E MÉTODOS

Conceituamos simetria de maneira geral via teoria de grupos de transformações. Observamos simetrias presentes em várias teorias da física. Em particular procuramos simetrias em equações diferenciais ordinárias aplicadas à descrição de problemas físicos. Revisamos os conceitos de grupos e álgebras de Lie. Procuramos soluções de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem não lineares via investigação de simetrias de Lie, finitas e infinitesimais. Incluirmos aspectos sociais e históricos relativos a equações diferenciais não lineares.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Jakob Bernoulli (1654 – 1705) foi um matemático suíço que pertenceu a grande família Bernoulli que durante três gerações deu ao mundo oito notáveis cientistas e uma grandeza de desavenças e curiosidades sobre essa família tão voltada a matemática, dentre elas, a rivalidade entre Jakob e seu irmão Johann Bernoulli, criador do desafio denominado Braquistócrona que foi lançado aos matemáticos mais brilhantes da Europa. Em 1690, Jakob introduziu o termo "integral" em sua solução do problema para determinar a curva de descida constante. Na mesma época, a relação entre Jakob e Johann deteriorou-se principalmente por causa do temperamento quente e excitável do jovem e muito ambicioso Johann. As brigas amargas entre eles tornaram-se tão notórias quanto a disputa de prioridade entre Leibniz e Newton, que começou mais ou menos na mesma época, sobre a criação do cálculo infinitesimal.

As equações do tipo Bernoulli são equações diferenciais ordinárias não lineares, descritas no formato: $y' + p(x)y = f(x)y^n$. Partindo desse tipo de equação conseguimos por meio de uma mudança de variável recair em uma equação diferencial linear em poucos passos:

FIGURA 1: Resolução da equação de Bernoulli.

$$y' + p(x)y = f(x)y^n \qquad (1)$$

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)y}{y^n} = \frac{f(x)y^n}{y^n} \qquad (2)$$

$$y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = f(x) \qquad (3)$$

Mudança de variável:

$$w = y^{(1-n)} \qquad (4)$$

$$w' = (1-n)y^{-n}y' \qquad (5)$$

$$\frac{w'}{1-n} = y^{-n}y' \qquad (6)$$

Substituindo as equações (4) e (6) na equação (3):

$$\frac{w'}{1-n} + p(x)w = f(x) \qquad (7)$$

$$\frac{w'}{1-n} = f(x) - p(x)w \qquad (8)$$

$$w' = (1-n)f(x) - (1-n)p(x)w \qquad (9)$$

$$w' + (1-n)p(x)w = (1-n)f(x) \qquad (10)$$

Sendo a equação (10) uma equação diferencial linear, onde podemos resolver pelo método do fator integrante. De fato, definindo $P(x) = (1 - n)p(x)$ e $Q(x) = (1 - n)f(x)$, a solução geral da equação linear (10) pode ser escrita como $w(x) = I(x)^{\{-1\}} (\int Q(x)I(x)dx + C)$ como $I(x) = e^{\int P(x)dx}$.

Já o matemático Jacopo Francesco Riccati nasceu em Veneza na Itália em 1676. Além de sua famosa equação diferencial, Riccati também deu contribuições matemáticas importantes sobre hidráulica que foram muito importantes para a cidade de Veneza. As equações diferenciais ordinárias do tipo Riccati são descritas no formato: $y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$ e, diferentemente da equação de Bernoulli, a de Riccati necessita de uma solução particular para ser resolvida, e assim recair em uma equação de Bernoulli. Embora Jacopo Francesco Riccati e Jakob Bernoulli tenham coexistido na mesma época pouco se sabe sobre conexões entre eles, entretanto, uma de suas equações foi parcialmente resolvida por dois dos notáveis cientistas da família Bernoulli, o que contribuiu para a generalização do formato de sua equação e provando que se conhecemos uma solução particular dessa equação diferencial podemos reduzi – la a uma equação de Bernoulli, da seguinte forma:

FIGURA 2: Resolução da equação de Riccati.

$y' = p(x) + q(x)y + r(x)\,y^2$ (1)

$y = yp + u$ (Solução particular) (2)

Substituindo a equação na (1):

$yp' + u' = p(x) + q(x)(yp + u) + r(x)(yp^2 + 2ypu + u^2)$ (3)

$p(x) + q(x)yp + r(x)yp^2 + u' = p(x) + q(x)yp + q(x)u + r(x)yp^2 + r(x)2ypu + r(x)u^2$ (4)

$u' = [q(x) + r(x)2yp]u + r(x)u^2$ (5)

Podemos observar que a equação (5) é uma equação do tipo Bernoulli, onde n=2.

CONCLUSÕES

Embora essas equações diferenciais ordinárias sejam matematicamente relativamente simples, suas aplicações são de grande importância em diversa áreas, como na mecânica quântica supersimétrica e em problemas variacionais, onde um operador de Schrödinger de segunda ordem pode ser fatorado em dois de primeira ordem resolvendo uma equação de Riccati e determinando o correspondente superpotencial. Além disso, seus aspectos históricos são extremamente ricos, atraindo os entusiastas das equações diferenciais e trazendo mais humanidade a essas equações.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Edilson F. Batista e R. Thibes. **Supersymmetric Aspects of One Dimensional Quantum Mechanics.** Revista Científica do Departamento de Química Exatas, v. 4, p. 1-10, UESB (2013)

[2] Sergio Bittanti, Alan J. Laub e Jan C. Willems. **The Riccati Equation**. Springer Verlag (1991).

[3] Carl B. Boyer e Uta C. Merzbach. **História da Matemática**. Blucher, 3ª edição (2012).

[4] Howard Eves. **Introdução à História da Matemática**. Unicamp (2004).

[5] Tatiana Roque. **História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Zahar (2012).

[6] William E. Boyce, Richard C. Diprima e Douglas B. Meade. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. LTC (2020).

AGRADECIMENTOS

A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia – FAPESB entidade financiadora desta pesquisa.