

ESTRUTURAS DE COLCHETES DE POISSON E DE DIRAC COMO ÁLGEBRAS DE LIE¹

Simone Macêdo Ribeiro², Ronaldo Thibes³

RESUMO

Definimos um Espaço Vetorial real como um conjunto não vazio que possui duas operações, chamadas de adição e multiplicação, que obedecem a algumas propriedades estabelecidas. Dadas essas definições, temos a álgebra de Lie que consiste em um Espaço Vetorial ao qual é agregada uma operação binária bilinear antissimétrica satisfazendo a identidade de Jacobi. Assim, o presente trabalho visa definir e caracterizar as estruturas de colchetes de Poisson e de Dirac e demonstrar que constituem efetivamente álgebras de Lie. Em função do que foi mencionado, percebe-se a importância de abordar esse assunto e quão rica é essa álgebra. Encerramos com alguns comentários sobre aplicações dos colchetes de Poisson e Dirac em outras áreas de Matemática, Matemática aplicada e Física-Matemática.

PALAVRA CHAVE: Álgebra de Lie; Aplicações; Espaço Vetorial; Física.

POISSON AND DIRAC BRACKET STRUCTURES AS LIE ALGEBRAS

ABSTRACT

We define a real Vector Space as a non-empty set that has two operations, called addition and multiplication, that obey some established properties. Given these definitions, we have the Lie algebra that consists of a Vector Space to which an antisymmetric bilinear binary operation satisfying the Jacobi identity is added. Thus, the present work aims to define and characterize the Poisson and Dirac bracket structures and demonstrate that they effectively constitute Lie algebras. Based on what has been mentioned, one can see the importance of approaching this subject and how rich this algebra is. We close with some comments on applications of Poisson and Dirac brackets in other areas of Mathematics, Applied Mathematics and Mathematical Physics.

KEYWORDS: Lie algebra; Applications; Vector Space; Physical.

INTRODUÇÃO

¹ Entidade Financiadora: Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia – FAPESB.

² Bolsista: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB. Endereço: BR 415, Itapetinga - BA, 45700-000.

³ Orientador, Prof. Dr. da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia – UESB. Endereço: BR 415, Itapetinga - BA, 45700-000.

Ao iniciarmos nosso estudo sobre álgebras, especificamente sobre álgebras de Lie, é importante trazer sua origem provinda da definição de espaço vetorial; este é um dos exemplos mais significativos de estrutura algébrica, no qual para sua construção seguimos determinadas condições e operações trabalhadas através de objetos matemáticos. Em particular, toda álgebra é também um espaço vetorial. Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial ao qual agregamos uma operação binária bilinear antisimétrica satisfazendo a identidade de Jacobi, constituindo em particular uma álgebra não-associativa. Suas propriedades são definidas como

Bilinearidade: $[\alpha F + G, H] = \alpha[F, H] + [G, H]$

Anti-simetria: $[F, G] = -[G, F]$

Identidade de Jacobi: $[F, G], H + [G, H], F + [H, F], G = 0$

Concebida a partir dos trabalhos originais de Sophus Lie desde a década de 1870, as álgebras de Lie podem ser encontradas hoje em dia em várias áreas da matemática, tanto pura quanto aplicada. As estruturas algébricas de colchetes de Poisson e de Dirac constituem instâncias de álgebras de Lie. Tal fato, contudo, é por vezes deixado de lado ou esquecido em várias aplicações de colchetes de Poisson e de Dirac, levando à desnecessária repetição de demonstrações, mais longas e complicadas. Neste trabalho, temos como objetivo definir e caracterizar as estruturas de colchetes de Poisson e de Dirac e demonstrar que constituem efetivamente álgebras de Lie.

MATERIAL E MÉTODOS

Como ambiente inicial para definirmos os colchetes de Poisson, consideramos inicialmente um espaço simplético de dimensão $2n$ dado por um conjunto de variáveis reais independentes q^k e p_k , com $k = 1, \dots, n$, doravante denominado de espaço de fase. A partir daí, consideramos o conjunto de funções diferenciáveis em $2n$ variáveis reais. Considerando somatórios envolvendo as derivadas parciais destas funções, definimos o parêntese de Poisson de forma derivativa.

$$[F, G] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q^k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q^k} \right) \quad (1)$$

Após a devida implementação demonstramos que o colchete de Poisson, constitui portanto uma álgebra de Lie. Em seguida selecionamos um conjunto de m

funções particulares, denominadas vínculos, a partir dos quais podemos enfim definir os colchetes de Dirac como uma extensão do conceito anterior de colchete de Poisson. Os resultados dos cálculos dos colchetes de Poisson entre os vínculos, geram um conjunto de m^2 funções organizadas na matriz de vínculos. Invertendo a matriz de vínculos, podemos enfim definir a estrutura de colchete de Dirac. Em seguida, demonstramos explicitamente as três propriedades de álgebra de Lie, bilinearidade, anti-simetria e identidade de Jacobi para os colchetes de Dirac.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Iniciamos provando as três propriedades de álgebra de Lie utilizando a operação dos colchetes de Poisson **(1)** e provando assim que ela satisfaz uma álgebra de Lie. Posteriormente utilizamos a operação do colchetes de Dirac **(2)** para demonstramos que este forma também uma álgebra de Lie.

$$\{F, G\}^* = \{F, G\} - \sum_{a,b} \{F, \phi_a\} C_{ab} \{\phi_b, G\} \quad (2)$$

Os colchetes de Dirac são lineares em cada entrada e a verificação da anti-simetria é dada abaixo:

$$\{F, G\}^* = -\{G, F\} - \sum_{a,b} \{\phi_b, G\} C_{ab} \{F, \phi_a\} = -(\{G, F\} - \sum_{a,b} \{G, \phi_a\} C_{ab} \{\phi_b, F\}) = -\{G, F\}$$

A identidade de Jacobi pode ser demonstrada em partes inicialmente conforme figura 1.

FIGURA 1: Demonstração da Identidade de Jacobi para Colchetes de Dirac

$$\begin{aligned} \{ \{F, G\}^*, H \}^* &= \{ \{F, G\} - \sum_{a,b} \{F, \phi_a\} C_{ab} \{\phi_b, G\}, H \}^* \\ &= \{ \{F, G\} - \sum_{a,b} \{F, \phi_a\} C_{ab} \{\phi_b, G\}, H \} - \sum_{c,d} \{ \{F, G\} \\ &\quad - \sum_{a,b} \{F, \phi_a\} C_{ab} \{\phi_b, G\}, \phi_c \} C_{cd} \{\phi_d, H\} \\ &= \{ \{F, G\}, H \} - \sum_{a,b} \{ \{F, \phi_a\} C_{ab} \{\phi_b, G\}, H \} - \sum_{c,d} \{ \{F, G\}, \phi_c \} \\ &\quad - \sum_{a,b} \{ \{F, \phi_a\} C_{ab} \{\phi_b, G\}, \phi_c \} C_{cd} \{\phi_d, H\} \\ \{ \{G, H\}^*, F \}^* &= \{ \{G, H\} - \sum_{a,b} \{G, \phi_a\} C_{ab} \{\phi_b, H\}, F \}^* \\ &= \{ \{G, H\} - \sum_{a,b} \{G, \phi_a\} C_{ab} \{\phi_b, H\}, F \} - \sum_{c,d} \{ \{G, H\} \\ &\quad - \sum_{a,b} \{G, \phi_a\} C_{ab} \{\phi_b, H\}, \phi_c \} C_{cd} \{\phi_d, F\} \\ &= \{ \{G, H\}, F \} - \sum_{a,b} \{ \{G, \phi_a\} C_{ab} \{\phi_b, H\}, F \} - \sum_{c,d} \{ \{G, H\}, \phi_c \} \\ &\quad - \sum_{a,b} \{ \{G, \phi_a\} C_{ab} \{\phi_b, H\}, \phi_c \} C_{cd} \{\phi_d, F\} \\ \{ \{H, F\}^*, G \}^* &= \{ \{H, F\} - \sum_{a,b} \{H, \phi_a\} C_{ab} \{\phi_b, F\}, G \}^* \\ &= \{ \{H, F\} - \sum_{a,b} \{H, \phi_a\} C_{ab} \{\phi_b, F\}, G \} - \sum_{c,d} \{ \{H, F\} \\ &\quad - \sum_{a,b} \{H, \phi_a\} C_{ab} \{\phi_b, F\}, \phi_c \} C_{cd} \{\phi_d, G\} \\ &= \{ \{H, F\}, G \} - \sum_{a,b} \{ \{H, \phi_a\} C_{ab} \{\phi_b, F\}, G \} - \sum_{c,d} \{ \{H, F\}, \phi_c \} \\ &\quad - \sum_{a,b} \{ \{H, \phi_a\} C_{ab} \{\phi_b, F\}, \phi_c \} C_{cd} \{\phi_d, G\} \\ \{ \{F, G\}^*, H \}^* + \{ \{G, H\}^*, F \}^* + \{ \{H, F\}^*, G \}^* &= 0 \end{aligned}$$

CONCLUSÕES

Deste modo, trouxemos a definição de álgebras de Lie que são constituídas de um espaço vetorial, às quais dentre suas amplas ramificações e representações foi estudada e analisada suas aplicações na Física. Foi trazido sua definição detalhada, e a partir disto, o quanto está interligada a outras operações como os colchetes de Poisson e os colchetes de Dirac, de maneira que demonstramos que estas operações constituem uma Álgebra de Lie. Priorizando as aplicações físicas concretas, observamos que todos os conceitos na definição e propriedades formais abstratos se fazem claramente presentes, possuindo um papel relevante específico e uma correspondente interpretação em cada aplicação particular.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ARAUJO, W. F. **Introdução a Álgebra de Lie**. Toledo, 2013.
- [2] CRAINIC, M.; FERNANDES, R. L.; MARCUT, I. **Lectures on Poisson Geometry**. Graduate Studies in Mathematics, AMS, 2021.
- [3] HENNEAUX M.; TEITELBOIM, C. **Quantization of Gauge Systems**. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1992.
- [4] HUMPHREYS, J. E. **Introduction to Lie Algebras and Representation Theory**. Springer, 1972.
- [5] LEMOS, N. A. **Analytical Mechanics**. 1. ed. Cambridge University Press, 2018.
- [6] MARTIN, L. A. B. S. **Álgebras de Lie**. Unicamp, 2010.
- [7] VAISMAN, I. **Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds**. Birkhäuser, 1994.

AGRADECIMENTOS

A Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado da Bahia – FAPESB entidade financiadora desta pesquisa.