

ANÁLISE DA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM PELO MÉTODO DAS SIMETRIAS

ANALYSIS OF THE SOLUTION OF FIRST ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS BY THE SYMMETRY METHOD

Igor Rodrigues Reis¹, Ronaldo Thibes², Nemésio Matos de Oliveira Neto³

Resumo

Este trabalho apresenta os resultados das investigações realizadas nos doze meses de iniciação científica, que começou pelo estudo das estratégias de obtenção de soluções de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) de primeira ordem e se estendeu à utilização das transformações e grupos de Lie em um método unificado de resolução. O método de resolução por simetrias retorna outra equação diferencial separável que se relaciona com a EDO inicial por simples mudanças de variáveis. Estas últimas, por sua vez, são obtidas de transformações infinitesimais parametrizadas que conservam o valor lógico da equação de modo a garantir uma invariância na estrutura algébrica. É possível perceber uma certa viabilidade quanto à análise de taxas de variação, ao verificar as projeções gráficas das novas equações e soluções obtidas por simetria. Essa característica é favorável em diversas situações de modelagem quando faz-se necessário um estudo mais fluido quanto ao comportamento de uma dada EDO.

Palavras-Chave: Simetria, Invariância, Equações Diferenciais de Primeira Ordem.

Abstract

This work presents the results of the investigations carried out during the twelve months of scientific initiation, which began with the study of strategies for obtaining solutions for first-order Ordinary Differential Equations (ODE) and extended to the use of transformations and Lie groups in a unified method of resolution. The symmetry solving method returns another separable differential equation that relates to the initial ODE by simple changes of variables. The latter, in turn, are obtained from parameterized infinitesimal transformations that preserve the logical value of the equation in order to guarantee an invariance in the algebraic structure. It is possible to perceive a certain feasibility regarding the analysis of rates of change, when verifying the graphic projections of the new equations and solutions obtained by symmetry. This characteristic is favorable in several modeling situations when a more fluid study is necessary regarding the behavior of a given ODE.

¹ Licenciando, UESB - Campus Jequié. Email: igakodaemon@gmail.com

² Orientador, Prof. Dr., UESB - Campus Itapetinga. Email: thibes@uesb.edu.br

³ Coorientador, Prof. Dr., UESB - Campus Jequié. Email: nmon@uesb.edu.br

Keywords: Symmetry, Invariance, First-order Differential Equations.

INTRODUÇÃO

As Equações Diferenciais (ED) têm representado um papel fundamental na vida do pesquisador moderno. Diante disso, é de extrema importância o conhecimento dos principais métodos de resolução, bem como, a interpretação das informações provenientes das soluções obtidas. Há, portanto, classificações que separam as ED em grupos distintos, de modo a restringir condições específicas para garantir as soluções em cada caso particular, quer elas existam ou não (BOYCE et al., 2020).

Nas investigações, focamos na análise de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem. Atentamos primeiro para as diferentes categorias desse grupo que apresentam características particulares de solução. Essa subdivisão consiste antes de tudo na classificação quanto à linearidade, a qual implica diretamente, caso seja linear, no método de resolução pelo fator integrante de Leibniz (BOYCE et al., 2020). Quando as ED não são lineares, a existência de um método único de resolução não é garantida. Assim, as discriminações com relação a características específicas das mesmas vão determinar métodos distintos de solução. Ao ampliar esses conceitos em uma generalização da ideia de EDO de primeira ordem, verificamos, pela condição de invariância de Lie, estratégias que permitem modificar a estrutura padrão da equação diferencial com mudanças de variável obtidas das transformações infinitesimais de simetria (ARRIGO, 2015). Entender como essas equações se comportam com as mudanças invariantes de sua estrutura é fundamental para a compreensão dos fenômenos descritos por meio desses objetos da Matemática.

MATERIAIS E MÉTODOS

Dada uma EDO de primeira ordem não linear da forma $dy/dx = f(x,y)$, é possível determinar, pelas transformações de Lie que a deixa invariante (ou inalterada), uma EDO separável equivalente $ds/dr = g(s,r)$ em que $s = s(r)$ a qual retorna o mesmo conjunto de soluções pelas mudanças de variáveis $r = C(x,y)$ e $s = D(x,y)$ (ARRIGO, 2015). Ao esboçar os gráficos de $f(x,y)$ e $g(r,s)$ no software Geogebra é possível analisar as características particulares de f e g , bem como analisar o comportamento da solução “geral” dentro do teorema de garantia de existência de uma solução única para um problema de valor inicial (BOYCE et al., 2020).

Após desenvolvermos a parte teórica do método de construção de soluções via análise de simetrias de Lie de EDO, abordamos exemplos específicos ilustrativos do

método. Mostramos como os passos teóricos podem ser implementados de maneira prática computacionalmente no software Geogebra e obtemos os gráficos das soluções tanto dos passos intermediários quanto da solução final, ilustrando de forma clara e objetiva os benefícios do método das simetrias de Lie.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Considere a seguinte EDO de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x} + \frac{x^5}{2y + x^3} \quad (1)$$

As estratégias de solução para essa equação em um primeiro momento pode não ser óbvia. Sabemos dizer, com uma olhada superficial, que ela se trata de uma EDO de primeira ordem não linear. Entretanto, é preciso manipular um pouco para determinar se é homogênea, separável, exata ou qualquer outra classificação. Assim, determinar um método de resolução com informações insuficientes pode ser algo desafiador. Todavia, pelo método das simetrias podemos encontrar uma solução identificando apenas a função $F(x,y)$.

Da condição de invariância de Lie, obtemos os infinitesimais $X(x,y)=x$ e $Y(x,y)=3$ que nos retorna, pelas mudanças de variável $r = y/x^3$ e $s = \ln x$, a EDO separável

$$\frac{ds}{dr} = 2r + 1 \quad (2)$$

Sabemos que a equação 2, que é separável e possui resolução por integração direta se relaciona com a equação 1 pelas mudança de variáveis que obedecem condição de invariância Lie. Desse modo, resolver 2 implica diretamente na resolução de 1 quando retornamos às variáveis originais. Quando projetamos os gráficos das soluções para 2 e para 1, obtemos desenhos diferentes, apesar das relações entre ambas as equações.

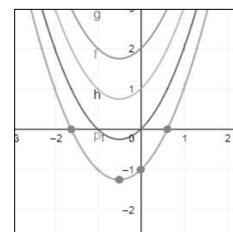
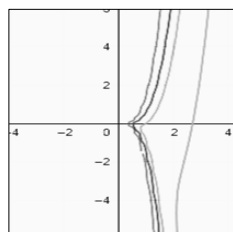


FIGURA 1: Soluções da EDO 1

FIGURA 2: Soluções da EDO 2

As estruturas gráficas de ambas as equações discutidas neste tópico também esboçam diferentes superfícies no espaço quando pensamos nas taxas de variação como funções de duas variáveis, o que permite uma compreensão mais ampla sobre o que acontece quando elas variam.

CONCLUSÕES

As simetrias em equações diferenciais, a partir dos trabalhos de Lie, torna possível a unificação de muitos métodos de resolução anteriormente conhecidos, bem como a busca de novas soluções. Do ponto de vista prático, concluímos que a utilização do método de resolução de EDO por simetrias permite uma ampliação no campo de análise do comportamento de taxas de variação.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o financiamento da bolsa pela agência CNPq para a realização das atividades investigativas deste trabalho e as participações dos bolsistas Israel Almeida Lopes, Rafael Lima Caires e Simone Macêdo Ribeiro, financiados pela FAPESB, nas discussões interdisciplinares.

REFERÊNCIAS

ARRIGO, Daniel J. **Symmetry analysis of differential equations**: an introduction. 1. ed. Conway, AK: Wiley, 2015. 192 p. ISBN 978-1-118-72140-7.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C.; MEADE, Douglas B. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 11. ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2020.

GEOGEBRA TEAM. . **GeoGebra**[S. l.], 20 mar. 2001. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 14 fev. 2022.

REIS, Igor R.; RIBEIRO, Simone M.; OLIVEIRA-NETO, Nemésio M. de; THIBES, Ronaldo S. Análise Gráfica de Soluções de Equações Diferenciais de Primeira Ordem. In: SEMANA DE FÍSICA, 6., 2021, Evento Online. **Anais** [...]. Vitória da Conquista: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), 2022.