Condição de Armijo: uma visão inicial

Samara Viriato Vilar Dias [1], Teles Araújo Fernandes [2]

Na otimização contínua busca-se solucionar problemas ao determinar os valores extremos de uma função, isto é, o valor de máximo ou de mínimo de uma função. Os métodos estudados para encontrar extremos de funções têm importantes aplicações práticas, por exemplo, no sistema de busca do Google, na pressão exercida pela mão de um robô ao pegar um objeto e no processamento de imagem. Uma ferramenta eficaz para auxiliar na determinação de extremos de funções reais diferenciáveis é uma busca linear inexata: *a condição de Armijo*. Formalmente, ela é apresentada como segue.

Teorema 0.1. *Considere uma função diferenciável* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, uma direção de descida* $d \in \mathbb{R}^n$ *a partir de* $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ *e* $\eta \in (0, 1)$*. Então existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* $t \in [0, \delta)$ *temos*

$$f(\overline{x} + td) \leq f(\overline{x}) + \eta t \nabla f(\overline{x})^T d. \tag{1}$$

Neste trabalho, analisamos a busca de Armijo evidenciando os seus fatores em um exemplo de uma função definida no $\mathbb{R}^2$. Para isto, estudamos, primeiramente, o espaço euclidiano n-dimensional, suas operações e métricas. Logo após, estudamos as sequências no $\mathbb{R}^n$. A condição de Armijo consiste em determinar "o quanto vamos caminhar" na direção de um vetor, com origem em um ponto inicial e direção de decrescimento da função. Matematicamente, a condição de Armijo nos garante que, ao aplicá-la a partir de um ponto $\overline{x}$ na direção de descida d, existe um comprimento de passo t que fornece um decréscimo suficiente da função f em seu novo ponto, que é dado por $\overline{x} + td$. A fim de elucidar como funciona a condição de Armijo, aplicamos ela para decrescer o valor da função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (y - 1)^2 + (x - 2)^2/2$. Tomamos o ponto inicial $x_0 = (1; 0)$ na direção de descida $d_0 = (3; 1)$ e considerando $\eta = 1/4$ encontramos $t_0 = 0,64$. Com isso, obtivemos $x_1 = x_0 + t_0 d_0 = (2,92; 0,64)$. Notou-se que t_0 assegura a desigualdade (1), pois $f(x_1) = 0,5528 < 1,5 = f(x_0)$. Aplicando a condição de Armijo mais duas vezes obtivemos $t_1 = 0,7$, $t_2 = 0,6$ e os pontos $x_2 = (2,57; 1,165)$ e $x_3 = (1,97; 1,165)$. Assim, foi assegurada uma sequência de pontos onde o valor da função decresce a cada ponto, ou seja, $f(x_{k+1}) < f(x_k)$, com $k = 0, 1, 2$. Esse processo iterativo nos faz obter um valor próximo ao valor de mínimo global da função f, que é zero. Portanto, a condição de Armijo se mostra como uma estratégia eficaz para determinar um extremo de uma função real. No próximo trabalho, iremos estudar métodos de otimização para determinar zero do gradiente de funções reais diferenciáveis de n variáveis.

Palavras-chave: Busca Linear, Condição de Armijo, Otimização contínua.

[1]Licencianda em Matemática, UESB, Estrada do Bem Querer, KM 4, Bairro Universitário, Vitória da Conquista – BA, 45031-900, samaravvilar@gmail.com.

[2]Professor Adjunto, UESB, Departamento de Ciências e Tecnologias - DCT, Avenida José Moreira Sobrinho - Jequiezinho, Jequié - BA, 45205-490, telesfernandes@uesb.edu.br.