Um estudo sobre o Método do Gradiente

Breno Vieira Sousa[1], Teles Araújo Fernandes[2]

Determinar pontos críticos de funções tem importantes aplicações, como por exemplo, determinar autovalores de matrizes simétricas, problemas relacionados a sistemas de agroindústria entre outros. Normalmente, existe dificuldade de determinar esses pontos críticos de maneira algébrica, para isso, se faz necessário a utilização de algoritmos para realizar esta tarefa. Para este fim, alguns métodos de Otimização Contínua são aplicados, por exemplo, o Método de Newtom, BFGS, e o Método do Gradiente. Neste trabalho, nós fizemos uma análise teórica do Método do Gradiente equipado com as normas Euclidiana, da soma e do máximo. A fim de evidenciar, do ponto de vista numérico, qual das três normas têm um melhor desempenho nós minímizamos a função de Rosenbrock, dado por: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \sum_{i}^{n-1} [a(x_{i+1} - x_i^2)^2 + b(x_i - 1)^2] \quad \text{com } a, b \in \mathbb{R}.$$

No que segue, apresentamos formalmente o Método do Gradiente:

Algoritmo 1: Método do gradiente (MG)

---

1. Tome um ponto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in (0, 1)$, $\epsilon > 0$ e faça $k := 0$.
2. $d_k := -\nabla f(x_k)$.
3. Se $||d_k|| > \epsilon$ faça
$$\alpha_k := \max \left\{ 2^{-j} : f(x_k + 2^{-j} d_k) \le f(x_k) - \eta 2^{-j} (\text{norm}(d_k))^2,\ j \in \mathbb{N} \right\}. \qquad (1)$$
4. $x_{k+1} := x_k + \alpha_k d_k$.
5. $k \leftarrow k + 1$ e retome para o **passo** 2.

O que segue assegura convergência de uma sequência gerada pelo Algoritmo 1.

Teorema 0.1. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Então, toda sequência gerada pelo Algoritmo 1 é globalmente convergente.*

Observamos que no **passo** 3, norm(·) denota a norma Euclidiana, do máximo, ou da soma. Implementamos o Algoritmo 1 para $n = 10, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 500$, $a = 1, 10, 15, 30$ e 5 pontos iniciais para cada n e cada a. Isto totaliza 200 problemas. Nossos experimentos numéricos mostram que os três métodos resolveram em torno de 75% dos problemas. O Algoritmo 1 apresenta desempenho similar nas três normas. Contudo, na norma euclidiana o desempenho oscila, na norma da soma e na norma do máximo, o desempenho é estável.

Palavras-chave: Busca de Armijo; Método do gradiente; Métrica; Otimização contínua.

[1]Licenciando em Matemática, UESB, Estrada do Bem Querer, KM 4, Bairro Universitário, Vitória da Conquista - BA, 45031-900, 3vieirabreno250@gmail.com.

[2]Professor Adjunto, UESB, Departamento de Ciências e Tecnologias - DCT, Av. José Moreira Sobrinho - Jequiezinho, Jequié - BA, 45205-490, telesfernandes@uesb.edu.br.