SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES E APLICAÇÕES A EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Luane Maria Madruga Bezerra Cavalcanti Ramalho[1], Ricardo Freire da Silva (Orientador)[2]

RESUMO

Este trabalho apresenta uma introdução à teoria de semigrupos de operadores lineares, um campo da análise funcional com aplicações no estudo de equações diferenciais parciais (EDPs) de evolução. São introduzidos os conceitos fundamentais da teoria, incluindo a definição de semigrupos de classe C^0, seu gerador infinitesimal e a relação entre estes elementos e a solução de problemas de Cauchy abstratos em espaços de Banach. O objetivo central do trabalho consiste em enunciar e demonstrar o Teorema de Hille-Yosida, resultado que estabelece condições necessárias e suficientes para que um operador linear seja gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C^0, e aplicar este resultado para garantir que a equação de Schrödinger tem uma única solução em um espaço de funções adequado.

PALAVRAS-CHAVE: Equação de Schrödinger, Equações diferenciais parciais, Teorema de Hille-Yosida, Teoria de Semigrupos.

SEMIGROUPS OF LINEAR OPERATORS AND APPLICATIONS TO PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

ABSTRACT

This work presents an introduction to the theory of semigroups of linear operators, a field of functional analysis with applications to the study of evolution partial differential equations (PDEs). The fundamental concepts of the theory are introduced, including the definition of C^0-semigroups, their infinitesimal generator, and the relationship between these elements and the solution of abstract Cauchy problems in Banach spaces. The main goal of this work is to state and prove the Hille-Yosida theorem, which provides necessary and sufficient conditions for a linear operator to be the infinitesimal generator of a C^0-semigroup, and to apply this result to guarantee the Schrödinger equation has a unique solution in an appropriate function space.

KEYWORDS: Hille-Yosida Theorem, partial differential equations, Schrödinger equation, Semigroup theory.

INTRODUÇÃO

[1] UESB – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, 202010474@uesb.edu.br. Agradeço à UESB pelo fomento.

[2] UESB – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, ricardo.silva@uesb.edu.br. Agradeço à UESB pelo fomento.

A equação de Schrödinger, é a equação diferencial parcial (EDP) dada por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = i\Delta u(t) & \text{em } \Omega \times (0,\infty), \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \times (0,\infty), \\ u(0) = u_0, & \text{em } \Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $\Omega \subset R^N$ é aberto, limitado e com fronteira regular. Esta equação é um modelo fundamental da mecânica quântica, área da física que estuda o comportamento de sistemas com escala subatômica, maiores detalhes podem ser consultados em [4]). A equação descreve como a função da onda u de uma partícula quântica evolui com o tempo (conforme o trabalho [6]). Do ponto de vista matemático a equação de Schrödinger apresentada em (0.1) é uma equação diferencial de evolução dispersiva. Suas soluções podem ser analisadas por diferentes métodos; neste trabalho, adotaremos a abordagem da teoria de semigrupos, a qual fornece ferramentas adequadas para o estudo de problemas evolutivos formulados por meio de equações diferenciais parciais (EDPs), permitindo tratá-los como problemas de Cauchy abstratos em espaços de Banach ou espaços de Hilbert. Um resultado clássico dessa teoria é o Teorema de Hille-Yosida, que, associado a outros resultados, fornece uma base adequada para o estudo da existência de soluções de EDPs de evolução. Em particular, para a equação de Schrödinger (0.1), considera-se o problema no espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$, onde se demonstra que o operador $i\Delta$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo, garantindo a existência e a unicidade da solução, dependendo do dado inicial u_0.

Um espaço de Banach é um espaço vetorial normado completo, isto é, no qual toda sequência de Cauchy converge na norma, enquanto um espaço de Hilbert é um espaço de Banach cuja norma provém de um produto interno. Exemplos importantes de espaços de Hilbert que serão usados neste trabalho são: o espaço $L^2(\Omega)$ e os espaços de Sobolev $H^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$.

MATERIAIS E MÉTODOS

Este estudo fundamenta-se em obras clássicas da teoria de semigrupos e da análise funcional, dentre as quais destacam-se os livros [1], [5], [2] e [3]. Estas obras fornecem a base teórica necessária para a formulação abstrata do problema de Cauchy associado à equação de Schrödinger. Na sequência, apresentam-se brevemente algumas definições.

Denota-se por $L(E,F)$ a família dos operadores lineares limitados (contínuos), onde E e F são espaços de Banach. O espaço vetorial $L(E,F)$, equipado com norma

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|\leq 1}} \|Ax\|$$

é um espaço de Banach. Uma aplicação $S\colon R^+ \to L(X,X)$ (X Banach) é chamada de semigrupo de operadores limitados de X se:

(i) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade de X,

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, para todo $t, s \in R^+$,

e é dito de classe C^0, se

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t)x - x\| = 0, \quad \forall x \in X.$$

O operador $A : D(A) \to X$, definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X \;\middle|\; \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe} \right\}, \quad \text{e} \quad Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h}, \quad \text{para todo } x \in D(A),$$

é dito o gerador infinitesimal do semigrupo S.

Para cada $u_0 \in X$ o problema de Cauchy abstrato é dado por:

$$\frac{du}{dt}(t) = Au(t)\ ,\ u(0) = u_0,\ t > 0, \tag{0.2}$$

onde $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear e $u(0) = u_0$ é a condição inicial do problema.

Uma função $u : R^+ \to X$ é dita solução clássica do problema (0.2), se:

(i) u é contínua para todo $t \geq 0$;

(ii) u é continuamente diferenciável para $t > 0$;

(iii) $u(t) \in D(A)$, para todo $t > 0$;

(iv) u satisfaz (0.2).

Dizemos que uma função u : R+ → X é uma solução mild de (0.2), se:

(i) u é contínua para todo $t \geq 0$;

(ii) $\int_0^t u(s)\, ds \in D(A)$ para todo $t > 0$

(iii) $u(t) = A\int_0^t u(s)\, ds + u_0$

O procedimento adotado no estudo consistiu em reformular a equação de Schrödinger como um problema de Cauchy abstrato no espaço de Hilbert $L^2(\Omega)$. Nessa formulação, definiu-se o operador $A = i\Delta$ com domínio $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, e demonstrou-se que ele é gerador de um semigrupo fortemente contínuo utilizando o Teorema de Hille-Yosida.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Teorema 1: Seja S um semigrupo de classe C^0 e o operador A o gerador infinitesimal de S, se $x \in D(A)$ então $S(t)x \in D(A)$ para todo $t \geq 0$. Além disso, $S(t)x$ verifica:

$$\frac{\partial}{\partial t}[S(t)x] = AS(t)x, \quad \forall\ t \geq 0. \tag{0.3}$$

O Teorema 1, indica uma estratégia eficiente para resolver o problema de Cauchy abstrato (0.2): inicialmente, verifica-se se o operador A dado é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C^0 em um domínio $D(A)$. No caso afirmativo, pela igualdade (0.3), a solução clássica é dada por $u(t) = S(t)x$. Para se demonstrar que A é gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C^0, pode-se utilizar o Teorema de Hille-Yosida, o qual caracteriza operadores lineares que são os geradores de algum semigrupo de classe C^0:

Teorema de Hille-Yosida: Para que um operador linear A, definido em $D(A) \subset X$ e com imagem em X, seja o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C^0 é necessário e suficiente que:

(i) A seja fechado e seu domínio seja denso em X.

(ii) Existam números reais M e ω tais que para cada real $\lambda > \omega$ se tenha $\lambda \in \rho(A)$ e

$$||R(\lambda; A)^n||_{L(X,X)} \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad para\ todo\ n \in N.$$

Neste caso, $\left||S(t)|\right|_{L(X,X)} \leq Me^{\omega t}, t \geq 0$.

O próximo teorema garante que, se o operador A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C^0, então o problema de Cauchy abstrato (0.2) possui uma única solução.

Teorema 2: Seja S um semigrupo de classe C^0 e $A: D(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de S. Se $u_0 \in D(A)$, então existe uma única função $u \in C_0\big([0, +\infty); D(A)\big) \cap C^1([0, +\infty); X)$ a qual é uma solução clássica do Problema de Cauchy em (0.2). Se $u_0 \in X$, então existe uma única solução mild de (0.2).

CONCLUSÕES/ CONSIDERAÇÕES

Pelo Teorema de Hille-Yosida, verifica-se que o operador $A = i\Delta$ com domínio $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ gera um semigrupo de classe C^0 em $L^2(\Omega)$. Portanto, pelo Teorema 2, a equação de Schrödinger (0.1) possui uma única solução dependendo da condição inicial u_0, ou seja, conclui-se o seguinte resultado.

Teorema de existência e unicidade de solução: O problema (0.1) possui uma única solução u clássica na classe

$$C^0\big([0,\infty); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\big) \ \cap \ C^1\big([0,\infty); L^2(\Omega)\big)$$

quando $u_0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Se $u_0 \in L^2(\Omega)$, então existe uma única solução mild de (0.1).

Neste trabalho, a equação de Schrödinger foi reformulada como um problema de Cauchy abstrato em $L^2(\Omega)$ e demonstrou-se, a partir da teoria de semigrupos e do Teorema de Hille–Yosida, que o operador $A = i\Delta$ gera um semigrupo fortemente contínuo, o que garante a existência e unicidade da solução do problema (0.1). Os resultados obtidos ilustram a grande utilidade da teoria de semigrupos na análise de equações diferenciais parciais, fornecendo um quadro unificado e rigoroso para tratar problemas evolutivos. Além disso, abre caminho para investigações futuras, como o estudo de condições de fronteira mais gerais, a inclusão de potenciais externos e a análise de propriedades qualitativas das soluções.

REFERÊNCIAS

[1] Amnon Pazy. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. 1 st edition. Springer-Verlag New York, 1983.

[2] BREZIS, Haim; BRÉZIS, Haim. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. New York: Springer, 2011.

[3] CAZENAVE, Thierry; HARAUX, Alain. An introduction to semilinear evolution equations. Oxford University Press, 1998.

[4] David J. Griffiths. Introduction to Quantum Mechanics. 2nd edition. Pearson Prentice Hall, 2005. Versão em PDF disponível.

[5] Marcelo M. Cavalcanti, Valéria N. Domingos Cavalcanti. Semigrupos Lineares e Não Lineares e Aplicações. Edição. Maringá: UEM/DMA, 2016.

[6] SCHRÖDINGER, Erwin. Quantisierung als eigenwertproblem. Annalen der physik, v. 385, n. 13, p. 437490, 1926.