

## ANÁLISE QUALITATIVA DE SISTEMAS DINÂMICOS CONTÍNUOS

Laisa Neves Pereira<sup>1</sup>, Lucas Venâncio da Silva Santos<sup>2</sup>

### RESUMO

Este trabalho tem como objetivo apresentar o resultado dos estudos sobre propriedades qualitativas de sistemas dinâmicos contínuos. Mas o que é um sistema dinâmico contínuo? De maneira bem ampla, um sistema dinâmico é algo que evolui com o passar do tempo, mais precisamente, podemos defini-lo como a tripla  $(X, R, \pi)$ , onde  $X$  é chamado de espaço de fase, cujos elementos ou pontos representam possíveis estados do sistema,  $R$  é o conjunto dos números reais e o  $\pi$  é uma aplicação do produto  $X \rightarrow R$  no espaço  $X$ , satisfazendo três axiomas fundamentais: axioma de identidade, axioma de grupo e axioma de continuidade. Apresentaremos resultados importantes sobre sistemas dinâmicos contínuos e também conceitos fundamentais sobre este assunto. O importante neste trabalho é explorar como estes sistemas podem ser descritos por exemplos importantes e para tal analisamos alguns exemplos, tais como soluções de equações diferenciais autônomas, em que verificamos se essas soluções definem um sistema dinâmico contínuo.

**PALAVRAS-CHAVE:** Espaço de fase, Equações diferenciais autônomas, Sistemas dinâmicos contínuos.

### QUALITATIVE ANALYSIS OF CONTINUOUS DYNAMICAL SYSTEMS

### ABSTRACT

This paper aims to present the results of studies on the qualitative properties of continuous dynamical systems. But what is a continuous dynamical system? Broadly speaking, a dynamical system is something that evolves over time. More precisely, we can define it as the triple  $(X, R, \pi)$ , where  $X$  is called the phase space, whose elements or points represent possible states of the system,  $R$  is the set of real numbers, and  $\pi$  is an application of the product  $X \rightarrow R$  in the space  $X$ , satisfying three fundamental axioms: the identity axiom, the group axiom, and the continuity axiom. We will present important results on continuous dynamical systems and also fundamental concepts on this subject. The important point in this paper is to explore how these systems can be described by important examples. To this end, we analyze some examples, such as solutions of autonomous differential equations, where we verify whether these solutions define a continuous dynamical system.

**KEYWORDS:** Autonomous differential equations, Continuous dynamical systems, Phase space.

### INTRODUÇÃO

---

<sup>1</sup> Discente do curso de Licenciatura em Matemática. 202210861@uesb.edu.br 1

<sup>2</sup> Professor Mestre assistente do Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas da UESB. Lucas.santos@uesb.edu.br 2

O estudo de sistemas dinâmicos contínuos tem se mostrado uma área de grande relevância dentro da matemática pura e aplicada, já que possibilita descrever fenômenos complexos em diferentes campos.

O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma investigação qualitativa sobre sistemas dinâmicos contínuos. Ao longo do texto, são descritos os procedimentos metodológicos utilizados, os resultados da análise teórica desenvolvida e as considerações finais, que destacam a relevância do estudo para a formação acadêmica e para a compreensão de conceitos fundamentais da matemática.

### MATERIAIS E MÉTODOS

A metodologia adotada neste estudo foi de caráter qualitativo, fundamentada na análise de referências teóricas. O trabalho foi desenvolvido a partir de pesquisas bibliográficas, contemplando livros e materiais acadêmicos que abordam a temática em questão. Esse procedimento possibilitou a construção de uma base sólida de conhecimentos, permitindo interpretar e discutir os conceitos com maior profundidade.

As primeiras referências consultadas apresentavam uma linguagem mais simples, adequadas ao meu primeiro contato com o conteúdo de equações diferenciais ordinárias. Posteriormente, foi utilizado os livros sobre sistemas dinâmicos contínuos e artigos acadêmicos, buscando gradualmente materiais com uma linguagem mais complexa, o que contribuiu significativamente para o aprofundamento e enriquecimento dos meus estudos.

### RESULTADOS E DISCUSSÃO

O estudo iniciou-se com a revisão de conteúdos fundamentais previamente abordados em disciplinas de Cálculo, com ênfase em derivadas e integrais, a fim de fornecer a base necessária para o desenvolvimento do tema. Em seguida, foram analisadas as classificações das equações diferenciais ordinárias (EDOs), contemplando os casos lineares, homogêneos, separáveis e, principalmente, autônomos. Também foi discutido o teorema de existência e unicidade de soluções, com foco em sua aplicação a problemas de valor inicial.

Na sequência, a investigação voltou-se para os sistemas dinâmicos contínuos, analisando sua definição e propriedades. A partir da resolução de EDOs autônomas, buscou-se verificar em quais situações estas poderiam ser interpretadas como sistemas dinâmicos contínuos. Diversos exemplos foram trabalhados com o intuito de consolidar essa definição e evidenciar a relação entre EDOs e sistemas dinâmicos. Além disso, foram estudados conceitos relacionados aos sistemas semidinâmicos, bem como uma

definição modificada de sistema dinâmico, que considera o caso em que determinadas equações diferenciais não estão definidas para todo instante  $t$ , permitindo, assim, que a trajetória  $\pi(x, t)$  não precise estar definida para todo tempo.

Por fim, foram explorados sistemas de equações diferenciais e a análise de conjuntos invariantes, o que possibilitou ampliar a compreensão acerca do comportamento qualitativo das soluções, destacando a relevância da abordagem qualitativa na investigação de sistemas dinâmicos contínuos.

## CONCLUSÕES/CONSIDERAÇÕES

O estudo dessa temática representou um processo de amadurecimento acadêmico e pessoal, proporcionando o desenvolvimento de habilidades fundamentais para a formação em matemática. O contato constante com bibliografia especializada e a prática de sistematizar conceitos abstratos fortaleceram minha autonomia intelectual, a capacidade de análise crítica e a disciplina de estudo, competências que ultrapassam os limites do tema pesquisado.

Outra relevância dessa pesquisa é que ela proporcionou uma constante revisão de conceitos já estudados em Cálculo e Álgebra, funcionando como uma forma de reforço que evitou o esquecimento de tópicos essenciais para estudos mais avançados. Além disso, tive contato com conteúdo de disciplinas mais avançadas, o que foi um diferencial quando as cursei, pois muitos assuntos já haviam sido explorados durante a iniciação científica. Nesse processo, destaco também a importância de ter estudado tópicos avançados que, em geral, são apresentados apenas em cursos de mestrado e doutorado em matemática. Para auxiliar na compreensão desses conteúdos, foram explorados e confeccionados diversos exemplos, os quais se mostraram de grande utilidade para o entendimento e consolidação dos conceitos trabalhados.

Assim, essa exploração reforçou a relevância da pesquisa teórica como meio de aprofundamento e de integração entre diferentes áreas da matemática. Essa vivência ampliou minha visão crítica sobre ensino e pesquisa e consolidou uma base sólida para futuras experiências acadêmicas e profissionais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BARREIRA, Luís; VALLS, Cláudia. **Dynamical systems: an introduction**. London: Springer, 2012.
2. BHATIA, N. P.; SZEGÖ, G. P. **Stability theory of dynamical systems**. Springer Science & Business Media, 2002.

3. BOLDRINI, José Luiz; COSTA, Sueli I. Rodrigues; FIGUEIREDO, Vera Lúcia; WETZLER, Henry G. **Álgebra linear**. 3. ed. rev. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
4. BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
5. CASTRO, H. M. A. D. **Equações diferenciais: teoria, técnica e prática**. 2008.
6. HALE, J. K. **Ordinary differential equations**. Courier Corporation, 2009.
7. LIMA, Elon Lages. **Curso de análise: volume 1**. 7. ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada – IMPA, 1976.
8. MALVEZZI, M. F. **Sistemas dinâmicos e equações diferenciais ordinárias**. 2013.
9. SOTOMAYOR, J. **Equações diferenciais ordinárias**. 2011.