

TEMPERATURA NO MAPA LOGÍSTICO

Samuel S. Santos¹, Guilherme V. B. Santos², Ignácio S. Gomez^{3,4}

RESUMO

Usando o Teorema da Equipartição (ET), propomos uma definição de temperatura para o mapa logístico, denominada temperatura do mapa (TM), que funciona como uma assinatura macroscópica da dinâmica do sistema. O ET normalmente se aplica a sistemas ergódicos em equilíbrio térmico, nos quais o espaço de fases apresenta uma distribuição de probabilidade uniforme entre todos os estados acessíveis. Para investigar os limites de aplicabilidade do ET, analisamos diferentes regimes dinâmicos do mapa logístico — incluindo dinâmicas regulares, oscilatórias, o limiar do caos e comportamento caótico totalmente desenvolvido — em termos da TM. Nossos resultados mostram que a TM passa por uma fase transitória curta, após a qual converge rapidamente em toda a faixa de parâmetros estudada. Valores de TM praticamente nulos estão associados a dinâmicas regulares, enquanto valores não nulos correspondem a regimes caóticos, incluindo tanto o caos plenamente desenvolvido quanto o início do caos. Por definição, a TM é adimensional e é numericamente normalizada em relação a uma temperatura característica do sistema. Nos casos em que há expressões analíticas disponíveis para as órbitas, os resultados formais para a TM coincidem de forma próxima com os cálculos numéricos. Esses achados indicam que a TM está bem definida na presença de pequenas flutuações típicas de regimes regulares, assim como em certos regimes caóticos, o que a torna compatível com as premissas do ET. Adicionalmente, discutimos conexões teóricas entre a densidade invariante do mapa e operadores de Markov, enriquecendo ainda mais a interpretação da TM dentro desse arcabouço.

PALAVRAS-CHAVE: Mapa Logístico, Operadores de Markov, Teorema da Equipartição.

TEMPERATURE IN LOGISTIC MAP

ABSTRACT

¹ Departamento de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Rodovia BR 415, km 03, s/n, Itapetinga, BA 45700-000, Brazil

² Departamento de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Rodovia BR 415, km 03, s/n, Itapetinga, BA 45700-000, Brazil

³ Departamento de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Rodovia BR 415, km 03, s/n, Itapetinga, BA 45700-000, Brazil

⁴ PROFÍSICA – Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Estadual de Santa Cruz, 45650-000 Ilhéus, BA, Brazil

Using the Equipartition Theorem (ET), we define a dimensionless map temperature (MT) for the logistic map as a macroscopic indicator of its dynamics. ET typically applies to ergodic systems in thermal equilibrium with uniform probability distributions. To explore its applicability beyond traditional contexts, we analyze MT across different dynamical regimes of the logistic map: regular, oscillatory, near the onset of chaos, and fully chaotic. We find that MT undergoes a brief transient before stabilizing across the entire parameter space. Near-zero MT values correspond to regular dynamics, while nonzero MT values indicate chaotic behavior, including both onset and fully developed chaos. MT is normalized relative to a characteristic system temperature and remains consistent even in regimes with small fluctuations. In cases with analytical orbit expressions, MT matches well with numerical results. We also explore theoretical links between MT, the map's invariant density, and Markov operators, supporting MT's validity as a macroscopic, thermodynamic-like descriptor in deterministic systems.

KEYWORDS: Equipartition Theorem, Logistic Map, Markov Operators.

INTRODUÇÃO

Na mecânica estatística clássica, o Teorema da Equipartição (TE) estabelece uma relação entre a temperatura total de um sistema e a média da energia cinética total de suas partículas. Para o caso ideal de um sistema com partículas não interagentes, a energia média por partícula é expressa por

$$E_{particle} = \frac{3}{2} k_B T$$

o que demonstra a proporcionalidade direta entre a temperatura e a energia cinética média, representada pela velocidade quadrática média das partículas.

Com base neste princípio, propomos um método para determinar a temperatura a partir da análise da dinâmica das partículas. Considerando um caso unidimensional para simplificar a abordagem e utilizando uma temperatura adimensionalizada $\frac{T}{T_0} = \frac{\langle v^2 \rangle}{v_0^2} \frac{mv_0^2}{k_B T_0}$, introduzimos a grandeza $T(\mu, N, M)$. Esta é definida como a média do quadrado dos deslocamentos das partículas em um único passo de tempo, calculada sobre um conjunto de M trajetórias distintas, conforme a equação:

$$T(\mu, N, M) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \left(x_{N+1}^{(j)} - x_N^{(j)} \right)^2 \quad \forall N = 0, 1, \dots,$$

Neste contexto, a grandeza $T(\mu, N, M)$, derivada diretamente da dinâmica das órbitas, emerge como uma contraparte numérica para a temperatura termodinâmica, estabelecendo uma conexão direta entre a teoria fundamental e a análise de dados de trajetórias do sistema.

MATERIAIS E MÉTODOS

A implementação do cálculo de temperatura para o mapa logístico seguiu um procedimento numérico e de processamento de dados específico. A grandeza $T(\mu, N, M)$ foi calculada para um conjunto de valores no intervalo do parâmetro μ de 0.05 a 4.

Adicionalmente, foi estudada a evolução temporal da temperatura, analisando-se a grandeza $T(\mu, N, M)$ em função do passo N de iteração. Este procedimento é fundamental para observar a dinâmica do sistema até que ele atinja um estado estacionário, permitindo a identificação de comportamentos transientes. A análise temporal fornece a base para o cálculo da temperatura média, que é realizada sobre os passos subsequentes ao período transiente.

Para garantir a robustez estatística, foram utilizadas $M = 10^5$ condições iniciais distintas $(x_0^{(j)})$ e a evolução de cada órbita foi acompanhada por $N = 10^3$ passos. Foi verificado que um aumento no número de condições iniciais para além 10^5 não alterava significativamente o comportamento da temperatura calculada.

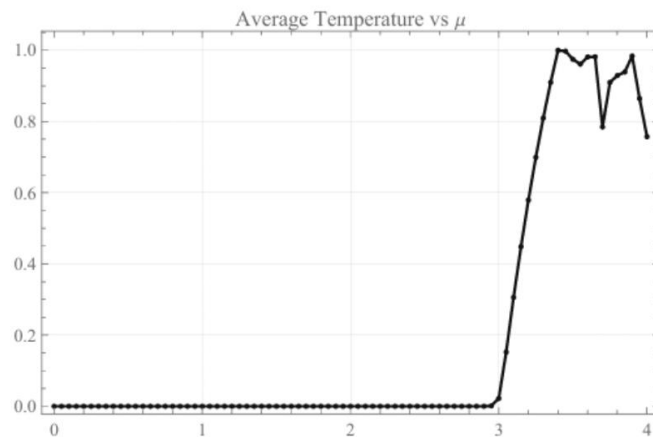
Durante a análise bruta dos dados observou-se a existência de um breve transiente temporal no comportamento da temperatura para alguns valores de μ . A fim de obter um valor de temperatura representativo do estado estacionário do sistema, foi calculada uma média temporal de $T(\mu, N, M)$ para cada μ , negligenciando-se os passos iniciais que compunham a região do transiente. Para facilitar a comparação visual e a análise dos resultados, a temperatura média final foi normalizada em relação ao valor máximo observado em toda a faixa de μ estudada.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A aplicação do método resultou em uma clara caracterização dos regimes dinâmicos do mapa logístico através da temperatura. O gráfico da temperatura média normalizada em função do parâmetro μ (Figura 1) demonstra que, para a região de comportamento regular e periódico ($0 < \mu \leq 3$), a temperatura do mapa permanece com valores próximos de zero. Na região de transição para o caos e no regime caótico, a

temperatura aumenta acentuadamente, indicando uma correspondência direta entre a temperatura definida e a complexidade dinâmica do sistema.

FIGURA 1: Valor médio da temperatura para $\mu = 0.05, 0.1, \dots, 3.90, 3.95, 4$ com $N = 10^3$ número de passos e $M = 10^5$ condições iniciais.



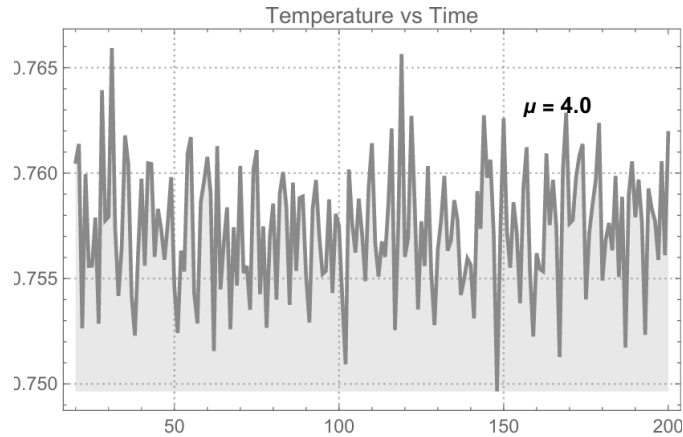
Fonte: Próprio autor.

Além dos resultados numéricos, foram demonstrados resultados formais para o comportamento assintótico da temperatura:

Teorema (I): Para o intervalo $0 < \mu \leq 3$, foi provado que a temperatura $T(\mu, N)$ converge para zero quando o número de passos $N \rightarrow \infty$.

Teorema (II): Para $\mu = 4$, correspondente ao caos totalmente desenvolvido, a temperatura $T(4, N)$ converge para um valor constante e positivo para um número de passos N suficientemente grande.

FIGURA 2: Evolução temporal da temperatura para $\mu = 4$



Fonte: Próprio autor.

A relação da temperatura com outras grandezas informacionais também foi investigada. Os resultados mostram que a Informação de Fisher (FI) atinge seus valores mais altos para temperaturas próximas de zero, enquanto a complexidade de Crámer-Rao (CR) exibe valores significativos predominantemente em temperaturas mais elevadas.

CONCLUSÕES/CONSIDERAÇÕES

A implementação da metodologia proposta permitiu validar a temperatura, $T(\mu, N, M)$, como uma assinatura macroscópica robusta da dinâmica do mapa logístico. A análise dos resultados demonstrou que essa grandeza é capaz de distinguir de forma eficaz os regimes dinâmicos do sistema, notadamente a transição de um comportamento regular (baixa temperatura) para um comportamento caótico (alta temperatura), alinhando-se à interpretação física de temperatura como medida da agitação do sistema.

A convergência da temperatura para zero nos regimes periódicos e para uma constante positiva no regime de caos completo, provada formalmente, solidifica a consistência teórica da abordagem. A correlação observada entre a temperatura do mapa e outras grandezas informacionais, como a Informação de Fisher e a complexidade de Crámer-Rao, reforça seu papel como um caracterizador relevante da dinâmica.

A abordagem de aplicar conceitos da termodinâmica estatística a um sistema determinístico se mostrou frutífera. Os resultados são promissores e indicam que a metodologia pode ser estendida para a análise de outros mapas caóticos, como o mapa tenda e o mapa circular, abrindo novas vias de pesquisa na caracterização de sistemas complexos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

FRIEDEN, R. B. Science from Fisher Information - A Unification. New York: Cambridge University Press, 2004.

LASOTA, A.; MACKEY, M. C. Probabilistic Properties of Deterministic Systems. New York: Cambridge University Press, 1985.

LÓPEZ-RUIZ, R.; MANCINI, H. L.; CALBET, X. A statistical measure of complexity. Physics Letters A, v. 209, p. 321-326, 1995.

MAY, Robert M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature, v. 261, p. 459-467, 1976.