

PASSEIOS ALEATÓRIOS DEFORMADOS DE ESTATÍSTICAS NÃO EXTENSIVAS¹

Daniel Rocha de Jesus²; Ignacio S. Gomez³

RESUMO

Utilizando a equação mestra da caminhada aleatória em um espaço de posições deformado, associada a uma homotopia entre massas dependentes da posição das estatísticas de Tsallis e Kaniadakis, obtemos, no limite contínuo, a equação de Fokker–Planck homotópica (HFPE). A HFPE se apresenta como um caso particular da equação de difusão de van Kampen, descrevendo um processo difusivo inhomogêneo bi-paramétrico que incorpora os parâmetros de deformação e homotopia. Essa abordagem permite recuperar as equações deformadas de Tsallis e Kaniadakis como casos limites. O sistema exhibe comportamento superdifusivo, com o desvio-padrão médio homotópico (HMSD) simétrico em relação ao parâmetro de deformação e sempre acima da difusão padrão na faixa de parâmetros estudada. Adicionalmente, obtém-se uma solução estacionária caracterizada por densidade entrópica que evidencia um efeito de blindagem do meio, derivado da versão homotópica do Teorema-H. Essa distribuição estacionária realiza uma interpolação contínua entre os regimes de Tsallis e Kaniadakis, eliminando divergências do caso de Tsallis. O estudo demonstra que estruturas homotópicas fornecem uma ferramenta teórica eficiente para modelar inhomogeneidades espaciais e dinâmicas difusivas complexas em caminhadas aleatórias, com potencial aplicação em diversos sistemas físicos.

PALAVRAS-CHAVE: Caminhada aleatória; Estatística de Kaniadakis; Estatística de Tsallis; Fokker–Planck; Homotopia.

DEFORMED RANDOM WALKS FROM NON-EXTENSIVE STATISTICS

ABSTRACT

Using the master equation of the random walk in a deformed position space, associated with a homotopy between position-dependent masses from Tsallis and Kaniadakis statistics, we obtain, in the continuous limit, the homotopic Fokker–Planck equation (HFPE). The HFPE emerges as a particular case of van Kampen’s diffusion equation, describing a bi-parametric inhomogeneous diffusive process that incorporates both deformation and homotopy parameters. This approach allows the recovery of the deformed equations of Tsallis and Kaniadakis as limiting cases. The system exhibits superdiffusive behavior, with the homotopic mean square displacement (HMSD) symmetric with respect to the deformation parameter and always above the standard diffusion within the studied parameter range. Additionally, a stationary solution characterized by an entropic density is obtained, evidencing a shielding effect of the medium, derived from the homotopic version of the H-theorem. This stationary distribution performs a continuous interpolation between the Tsallis and Kaniadakis regimes, eliminating divergences present in the Tsallis case. The study demonstrates that homotopic structures provide an efficient theoretical tool for modeling spatial

¹ Bolsa de iniciação científica IC PIBIC/CNPq

² Licenciando em Física. Departamento de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, BR 415, Itapetinga - BA, 45700-000, Brasil

³ Docente Adjunto. Departamento de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, BR 415, Itapetinga - BA, 45700-000, Brasil

inhomogeneities and complex diffusive dynamics in random walks, with potential applications in various physical systems.

KEYWORDS: Random walk; Kaniadakis statistics; Tsallis statistics; Fokker–Planck; Homotopy

INTRODUÇÃO

O passeio aleatório ou *random walk* (RW) é um modelo matemático que descreve o movimento de uma partícula que dá passos aleatórios em uma ou mais dimensões, em que a variável aleatória é tomada de acordo com uma determinada lei de probabilidade ou função de distribuição. A cada passo, a direção ou magnitude é determinada de forma aleatória, simulando processos como difusão de partículas, comportamento de preços financeiros e até dinâmicas biológicas.

Historicamente, o conceito de RW surgiu a partir de um problema proposto por Karl Pearson em 1905 aos leitores da revista *Nature*, no qual ele questionava sobre a probabilidade de um homem, que inicia sua jornada a partir de um ponto e faz uma série de movimentos aleatórios em direções diferentes, finaliza a uma certa distância de seu ponto inicial após um número de passos (Klafter e Sokolov, p.4, 2011).

No mesmo ano, Albert Einstein abordou um problema semelhante, mas dentro do contexto da Física, em seu artigo sobre o movimento de partículas suspensas em líquidos estáticos, que fazia parte de seu trabalho de doutorado. Um ano depois, Marian Smoluchowski publicou uma discussão independente sobre a caminhada aleatória, utilizando uma abordagem combinatória.

No entanto, o conceito de passeio aleatório foi observado pela primeira vez por Robert Brown em 1827 ao estudar grãos de pólen, e mais tarde, em 1900, foi formalizado como um modelo por Louis Bachelier para analisar especulações financeiras. O trabalho em questão generaliza este modelo clássico, introduzindo inhomogeneidades espaciais por meio de uma estrutura homotópica e do formalismo de estatísticas não extensivas.

MATERIAIS E MÉTODOS

A metodologia desta pesquisa consistiu na generalização do passeio aleatório padrão através da introdução de um passeio aleatório homotópico (HRW). Este HRW foi construído a partir de uma deformação homotópica da massa dependente da posição (PDM), que estabelece uma conexão contínua entre as estatísticas não extensivas de Tsallis e Kaniadakis. Para tal, foram utilizadas ferramentas como operações aritméticas

deformadas e equações mestras. A partir da equação mestra para o HRW no espaço deformado, foi derivada a equação de Fokker-Planck homotópica (HFPE) no limite contínuo. As análises das trajetórias e do comportamento difusivo foram realizadas tanto de forma analítica quanto por meio de simulações numéricas com o software Wolfram Mathematica.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A análise dos resultados revelou uma rica fenomenologia decorrente da estrutura homotópica com massa dependente da posição, em que nos casos limites de $\lambda = [0,1]$ recuperam as estatísticas de Tsallis e Kaniadakis, expressas a seguir.

$$m_{\gamma,0}(x) = \frac{m_0}{1 + \gamma^2 x^2}, \quad (\text{Kaniadakis PDM})$$

$$m_{\gamma,1}(x) = \frac{m_0}{(1 + \gamma x)^2}, \quad (\text{Tsallis PDM})$$

As trajetórias do HRW, simuladas numericamente, exibiram comportamentos distintos em função do parâmetro de homotopia λ : para $\lambda=0$ (Kaniadakis), o comportamento foi aleatório e similar ao RW padrão, enquanto para $\lambda=1$ (Tsallis), as trajetórias convergiram para um ponto de confinamento $x=-1/\gamma$, e para valores intermediários de λ , observou-se um comportamento misto.

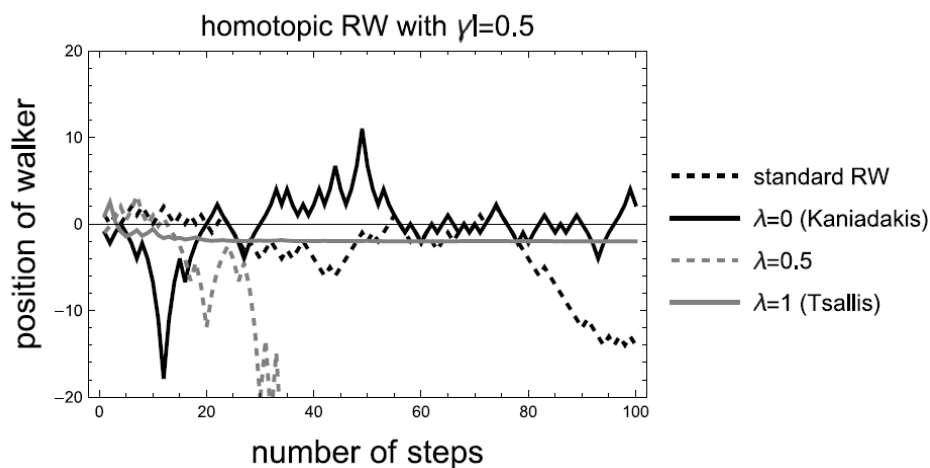


Figura 1- Passeios homotópicos após $n=100$ passos partindo de $x=0$ com $p=1/2$

A solução analítica da equação de Fokker-Planck homotópica (HFPE) permitiu obter a função de densidade de probabilidade (PDF), $P_{(x,t)}$, que descreve a evolução do sistema no espaço padrão

$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\gamma\lambda x + \gamma^2 x^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Gamma t}} \exp\left(-\frac{\ln^2\left(\frac{(\lambda + \gamma x + \sqrt{1 + 2\gamma\lambda x + \gamma^2 x^2})}{\lambda + 1}\right)}{(2\Gamma t)\gamma^2}\right)$$

A evolução temporal da PDF mostrou uma transição de uma distribuição inicial delta para distribuições assimétricas e com caudas pesadas, características de difusão anômala. O cálculo do desvio-padrão médio homotópico (HMSD), $\sigma_{\gamma,\lambda}^2(t)$, confirmou quantitativamente a natureza superdifusiva do processo para todos os valores de λ e γ estudados, indicando uma propagação mais rápida do que a difusão normal, onde $\sigma^2(t) \propto t$.

$$\sigma_{\gamma,\lambda}^2 = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x, t) dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x P(x, t) dx \right)^2$$

Além disso, a formulação de uma versão homotópica do Teorema-H levou à definição de uma densidade entrópica estacionária (SED). A análise da SED mostrou que, mesmo no estado de equilíbrio ($t \rightarrow \infty$), as inhomogeneidades do meio persistem, criando um "efeito de blindagem" que modula a distribuição de probabilidade.

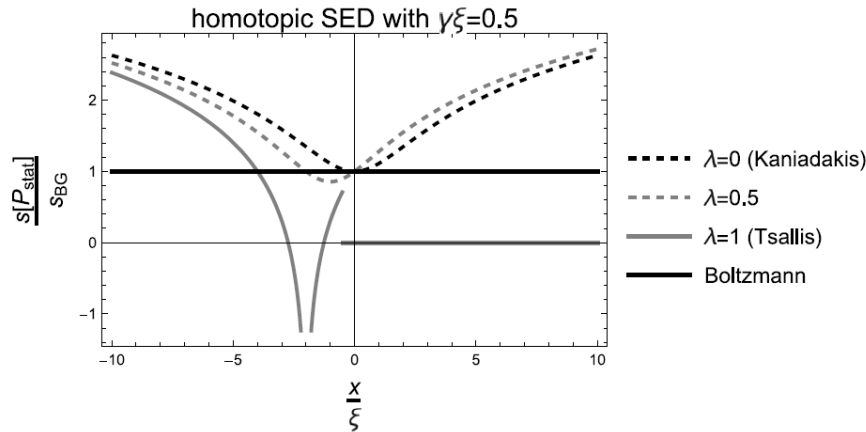


Figura 2 - Razão da densidade entrópica estacionária homotópica

Notavelmente, a homotopia remove a divergência presente no caso de Tsallis, conferindo maior robustez física ao modelo.

CONCLUSÕES/CONSIDERAÇÕES

Este trabalho apresenta o passeio aleatório homotópico (HRW), uma generalização do passeio aleatório tradicional baseada em uma deformação homotópica que conecta as massas dependentes da posição de Tsallis e Kaniadakis. A partir dessa construção, derivamos a equação de Fokker–Planck homotópica (HFPE),

que descreve as características microscópicas inhomogêneas da HRW no limite contínuo.

Os resultados mostraram que a HFPE apresenta superdifusão e depende fortemente dos parâmetros de deformação. As trajetórias da HRW exibem diferentes regimes, incluindo convergência, aleatoriedade e divergência, conforme os valores homotópicos. A solução da HFPE permite recuperar os casos deformados de Tsallis e Kaniadakis e evidencia comportamentos mistos para valores intermediários do parâmetro homotópico.

A análise do desvio-padrão médio homotópico (HMSD) indicou superdifusão em todos os casos e simetria em relação ao parâmetro de deformação, enquanto a razão SED homotópica evidenciou efeitos de blindagem inhomogênea e, no caso de Tsallis, divergência consistente com a localização da partícula.

A principal contribuição consiste em uma metodologia para gerar difusão inhomogênea via homotopias entre estruturas não extensivas, ampliando as possibilidades de estudo de sistemas complexos. Potenciais aplicações incluem transporte em meios heterogêneos, dinâmica de partículas, sistemas biológicos e processos econômicos. Este trabalho reforça ainda a versatilidade da teoria do passeio aleatório, que pode ser aplicada em modelos simples, paralelos, inteligentes ou combinados, demonstrando sua relevância para diferentes contextos acadêmicos e tecnológicos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BENJAMINI, I., PEMANTLE, R. & PERES, Y. Random walks in varying dimensions. *J Theor Probab* **9**, 231–244 (1996).

CASQUILHO, João Paulo. TEIXEIRA, Ivo Cortez. *Introdução à Física Estatística*. Editora Livraria da Física, São Paulo, 2012.

GOMEZ, Ignacio S.; JESUS, Daniel Rocha de; THIBES, Ronaldo. Random walks with homotopic spatial inhomogeneities. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 676, p. 130819, 2025.

KANIADAKIS, G. (2002). Statistical mechanics in the context of special relativity. *Physical Review E*, 66(5), 056125.

Klafter, J., and I. M. Sokolov, *First Steps in Random Walks: From Tools to Applications* (Oxford, 2011; online edn, Oxford Academic, 17 Dec. 2013)

Lima, Igo Pedro de. *Entropia de Tsallis Aplicada à Inversão Sísmica* / Igo Pedro de Lima. - 2021.

RIMES, Ighor Opiliar Mendes. *Uma simulação computacional do Passeio Aleatório Simples*. UERJ, Rio de Janeiro, 2015.

SANTOS, A. P. et al. Kaniadakis statistics and the quantum H-theorem. *Physics Letters A*, v. 375, p. 352–355, 2011.

SILVA, Marcela Diniz. *Teoria de homotopia e o grupo fundamental da S^1* . 2019. Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2019.

TSALLIS, C. (1988). Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, 52(1-2), 479-487.