

INFORMAÇÃO DE FISHER E COMPLEXIDADE DE CRAMÉR-RAO NA CARACTERIZAÇÃO  
DOS REGIMES DINÂMICOS DO MAPA LOGÍSTICO

SANTOS, Samuel Silva<sup>1</sup>  
(Graduando da Licenciatura em Física)

BRITO, Guilherme Vieira Jr.<sup>2</sup>  
(Graduando da Licenciatura em Física)

GOMEZ, Ignacio Sebastián<sup>3</sup>  
(Doutor em Física)

OLIVEIRA, Zolacir T. Junior<sup>4</sup>  
(Doutor em Física)

(Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia-UESB), Campus Itapetinga-BA

## RESUMO

O presente trabalho estuda a dinâmica do mapa logístico a partir de uma caracterização probabilística em termos da sua densidade invariante. Analisam-se os regimes relevantes da dinâmica (regular, oscilatório, início do caos e totalmente caótico) utilizando a Informação de Fisher (FI) e a complexidade de Cramér-Rao (CR) como quantificadores informacionais. Verificou-se que essas ferramentas são capazes de distinguir as diferentes regiões dinâmicas do mapa. A Informação de Fisher atinge seu valor máximo no comportamento regular, enquanto a complexidade CR exibe variações e um valor máximo próximo ao cenário de Pomeau-Maneville, sendo eficaz para diferenciar regimes onde a FI sozinha não consegue. Os resultados demonstram que a FI e a complexidade CR são quantificadores estatísticos eficazes para fornecer uma assinatura informacional da dinâmica do mapa.

**PALAVRAS-CHAVE:** Complexidade de Cramér-Rao, Dinâmica Caótica, Informação de Fisher, Mapa Logístico, Medida Invariante.

---

<sup>1</sup> Graduando de Licenciatura em Física, Voluntário no Programa de Iniciação Científica, Departamento de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Itapetinga, BA, Brasil.

<sup>2</sup> Graduando de Licenciatura em Física, Bolsista no Programa de Iniciação Científica, Departamento de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Itapetinga, BA, Brasil.

<sup>3</sup> Dr. Ignacio Sebastián Gómez, Professor assistente do Departamento de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Itapetinga, BA, Brasil.

<sup>4</sup> Dr. Zolacir T. Junior Oliveira, Doutor pela Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.

## FISHER INFORMATION AND CRAMÉR-RAO COMPLEXITY IN THE CHARACTERIZATION OF THE DYNAMIC REGIMES OF THE LOGISTIC MAP

### ABSTRACT

This work studies the dynamics of the logistic map based on a probabilistic characterization in terms of its invariant density. The relevant regimes of the dynamics (regular, oscillatory, onset of chaos, and fully chaotic) are analyzed using Fisher Information (FI) and Cramér-Rao (CR) complexity as informational quantifiers. It was found that these tools are able to distinguish the different dynamical regions of the map. Fisher Information reaches its maximum value in the regular behavior, while the CR complexity exhibits variations and a maximum value near the Pomeau-Maneville scenario, proving effective in differentiating regimes where FI alone cannot. The results demonstrate that FI and CR complexity are effective statistical quantifiers for providing an informational signature of the map's dynamics.

1 KEYWORDS: Chaotic Dynamics, Cramér-Rao Complexity, Fisher Information, Invariant Measure, Logistic Map.

### INTRODUÇÃO

Mapas discretos, como o mapa logístico, são ferramentas fundamentais para o estudo da evolução de sistemas dinâmicos. O mapa logístico é de especial interesse por sua capacidade de gerar uma vasta gama de comportamentos, desde regimes regulares e periódicos até o caos completo, passando por intermitência e outros fenômenos complexos.

Uma abordagem para analisar essa dinâmica é através de uma descrição probabilística, que utiliza a evolução de densidades de probabilidade governada pelo operador de Frobenius-Perron. Nesse contexto, a densidade invariante representa o estado estacionário do sistema no limite de tempos longos.

Para caracterizar as transições dinâmicas, quantificadores estatísticos como a Informação de Fisher (FI) e a complexidade de Cramér-Rao (CR) têm se mostrado ferramentas teóricas poderosas. A FI é particularmente sensível a variações locais na distribuição de probabilidade, atingindo valores altos para comportamentos regulares (distribuições de pico) e valores baixos para dinâmicas caóticas (distribuições uniformes).

A complexidade CR, por sua vez, desempenha um papel complementar, permitindo distinguir regimes dinâmicos que podem apresentar valores semelhantes de FI. O objetivo deste trabalho é, portanto, caracterizar os regimes dinâmicos do mapa logístico utilizando a FI e a complexidade CR, calculadas a partir da densidade invariante

### MATERIAIS E MÉTODOS

A análise foi realizada a partir da caracterização probabilística do mapa logístico, definido pela equação  $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$ . A densidade invariante  $\rho(x)$  do mapa, que representa a distribuição de probabilidade dos estados no limite assintótico, foi construída numericamente.

Para isso, o espaço de eventos  $[0,1]$  foi dividido em  $W$  intervalos (bins), e a densidade em cada intervalo  $\rho_i$  foi calculada como a fração de pontos da órbita que caem naquele intervalo, após um grande número de iterações  $N$ .

Para os cálculos numéricos, foram utilizados  $N = 10^6$  passos e  $W = 10^4$  bins, garantindo a convergência da densidade invariante. A partir da densidade de probabilidade discreta  $\{\rho_i\}$ , a Informação de Fisher foi calculada usando sua versão discreta:  $I[\rho] = 4 \sum_{i=0}^{W-1} (\sqrt{\rho_{i+1}} - \sqrt{\rho_i})^2$ . A complexidade de Cramér-Rao (CR) foi obtida pela expressão  $C[\rho] = I[\rho] \times \sigma^2$ , onde  $\sigma^2$  é a variância da distribuição de probabilidade. Esses dois quantificadores foram então calculados para um conjunto de valores do parâmetro de controle  $\mu$  do mapa logístico, a fim de analisar as transições dinâmicas.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

A análise da Informação de Fisher (FI) em função do parâmetro  $\mu$  (Figura 1 do artigo) revelou que a FI atinge um máximo absoluto em  $\mu = 1$ , correspondente a um comportamento regular onde as órbitas convergem rapidamente. Para valores entre  $1 \leq \mu < 3.4$ , a FI se mantém aproximadamente constante, não sendo capaz de distinguir as transições dinâmicas nessa região.

A partir de  $\mu = 3.4$ , a FI começa a diminuir, atingindo seu valor mínimo no regime totalmente caótico em  $\mu = 4$ , como esperado, já que o caos está associado a uma distribuição mais uniforme. Por outro lado, a complexidade de Cramér-Rao (CR), ilustrada na Figura 2 do artigo, demonstrou ser um quantificador mais sensível para diferenciar os regimes dinâmicos.

A complexidade CR apresenta variações notáveis e um pico de valor elevado próximo à região do cenário de Pomeau Maneville ( $3.56995 \leq \mu \leq 3.82843$ ), uma área de transição para o caos. A relação entre os dois quantificadores mostra seu comportamento complementar: em regiões onde a FI atinge valores muito altos (comportamento regular), a complexidade CR é incrivelmente pequena, e vice-versa. Isso confirma que a complexidade CR fornece informações adicionais, distinguindo comportamentos que a FI sozinha não consegue diferenciar.

## CONCLUSÕES/CONSIDERAÇÕES

Este estudo demonstrou que a Informação de Fisher e a complexidade de Cramér Rao, calculadas a partir da densidade invariante, são quantificadores eficazes para caracterizar e

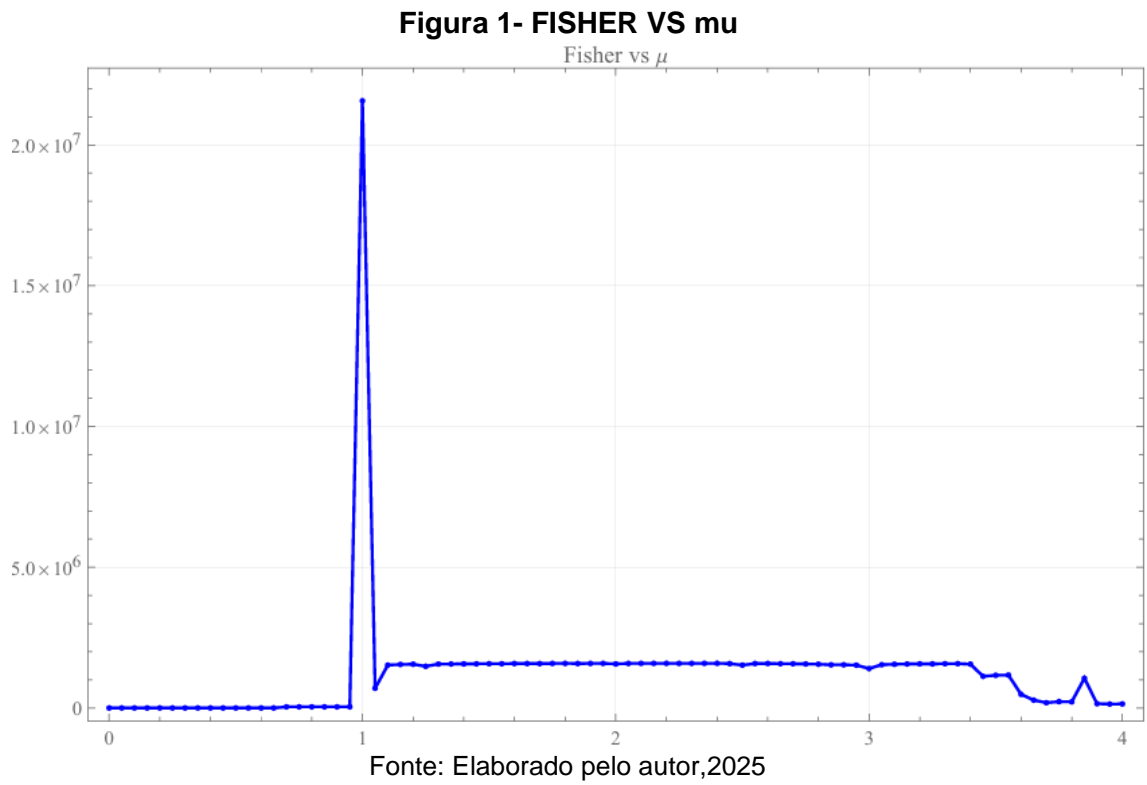
distinguir os diferentes regimes dinâmicos do mapa logístico. A FI se mostrou útil para identificar o comportamento regular em oposição ao caótico, enquanto a complexidade CR forneceu uma distinção mais fina entre as transições dinâmicas, especialmente na região de início do caos. A complementaridade entre as duas medidas oferece uma caracterização informacional robusta da dinâmica do sistema.

Os resultados obtidos são promissores e a metodologia aplicada pode ser potencialmente estendida para a análise de outros mapas caóticos, como o mapa tenda e o mapa circular, a fim de aprofundar a compreensão de suas complexidades dinâmicas.

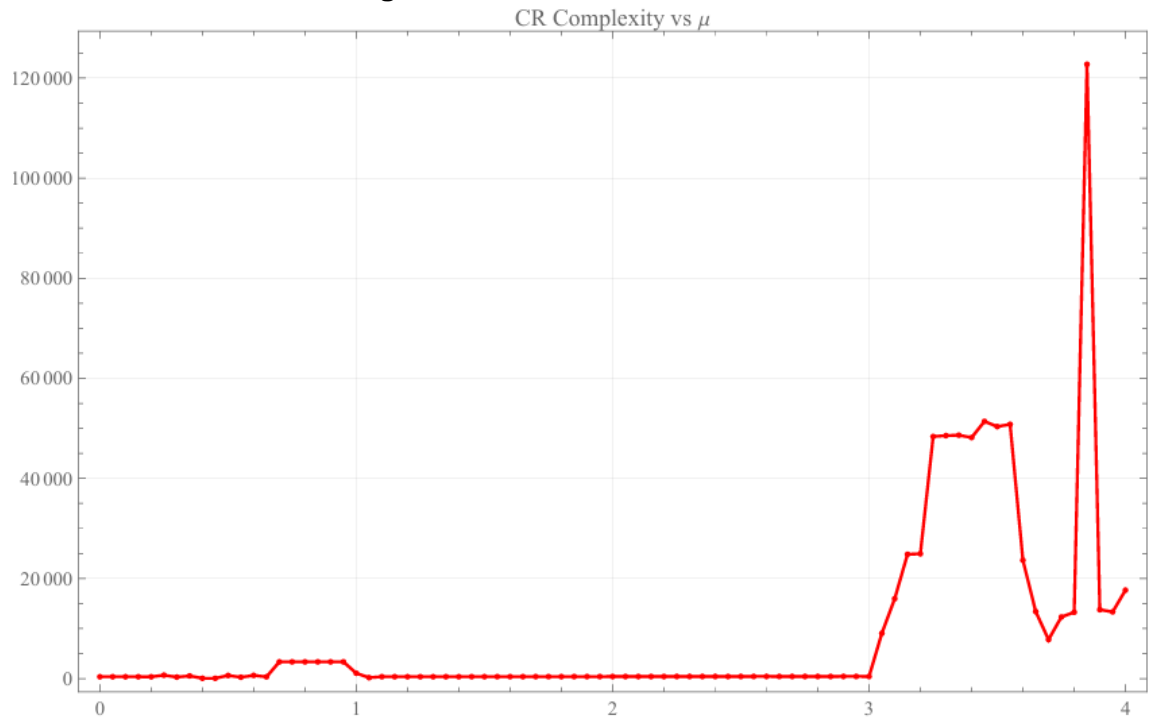
#### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. FRIEDEN, R. B. Science from Fisher Information- A Unification. New York: Cambridge University Press, 2004.
2. LASOTA, A.; MACKEY, M. C. Probabilistic Properties of Deterministic Systems. New York: Cambridge University Press, 1985.
3. LÓPEZ-RUIZ, R.; MANCINI, H. L.; CALBET, X. A statistical measure of complexity. Phys. Lett. A, v. 209, p. 321-326, 1995. 3
4. MAY, Robert M. Simple mathematical models with very complicated dynamics. Nature, v. 261, p. 45-467, 1976.

Figuras:



**Figura 2-COMPLEXIDADE VS  $\mu$**



Fonte: Elaborado pelo autor,2025