UM ESTUDO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO – CF E SUAS POSSÍVEIS APLICAÇÕES EM SISTEMAS FÍSICOS

Deivison Gabriel Soares Santos[1], Luizdarcy de Matos Castro[2]

RESUMO:

Equações diferenciais de ordem não inteira, conhecida como cálculo fracionário, representam uma significativa generalização do cálculo diferencial e integral clássico. Essa área tem se mostrado fundamental pela ampla gama de aplicações, oferecendo soluções mais abrangentes para problemas de diferentes naturezas. Em sistemas físicos complexos, a escolha da ferramenta matemáticas adequadas é essencial, e o cálculo fracionário destaca-se por permitir uma modelagem mais precisa ao incorporar efeitos de memória e não-localidade, aspectos que não podem ser descritos de forma satisfatória por equações diferenciais tradicionais. O presente trabalho tem como objetivo introduzir os fundamentos do cálculo fracionário e explorar suas potenciais aplicações em sistemas físicos. Adota-se como base a formulação proposta por Michele Caputo, em 1969, que consolidou uma generalização amplamente aceita do cálculo clássico. A pesquisa busca ainda analisar as possibilidades de utilização desse formalismo na descrição de dinâmicas do mercado financeiro, uma vez que tais sistemas frequentemente apresentam características de complexidade, dependência temporal e efeitos de longo alcance. Assim, pretende-se evidenciar como o cálculo fracionário pode contribuir para o desenvolvimento de modelos mais realistas e eficazes, ampliando sua relevância não apenas em ciências exatas, mas também em contextos interdisciplinares, como na economia.

PALAVRAS-CHAVE: Cálculo fracionário, Derivadas de Caputo;

ABSTRACT:

Fractional-order differential equations, also known as fractional calculus, represent a significant generalization of classical differential and integral calculus. This field has proven fundamental due to its wide range of applications, offering more comprehensive solutions to problems of diverse natures. In complex physical systems, the choice of appropriate mathematical tools is essential, and fractional calculus stands out by enabling more accurate modeling through the incorporation of memory and non-locality effects, aspects that cannot be satisfactorily described by traditional differential equations. The present work aims to introduce the fundamentals of fractional calculus and to explore its potential applications in physical systems. It adopts as a basis the formulation proposed by Michele Caputo in 1969, which consolidated a widely accepted generalization of classical calculus. The research also seeks to examine the possibilities of employing this formalism in the description of financial market dynamics, as such systems often display characteristics of complexity, temporal dependence, and long-range effects. In this way, the study intends to highlight how fractional calculus can contribute to the development of more realistic and effective models, thereby extending its relevance not only to the exact sciences but also to interdisciplinary contexts, such as economics.

KEYWORDS:

INTRODUÇÃO:

As equações diferenciais de ordem não inteira, abordadas pelo cálculo fracionário, emergem como uma ferramenta matemática inovadora que amplia o propósito do cálculo diferencial e integral tradicional. Essa abordagem é particularmente eficaz na modelagem de sistemas físicos complexos, onde as limitações das equações de ordens inteiras frequentemente falham em refletir a dinâmica real dos fenômenos observados. O cálculo fracionário viabiliza a exploração de conceitos de ordem fracionária, oferecendo uma compreensão mais profunda e abrangente de problemas matemáticos e físicos. Sua origem remonta meados de 1695, com uma proposta de L'Hôpital que desafiava a interpretação das derivadas fracionárias. Essa questão provocativa inspirou o desenvolvimento de uma rica teoria matemática, com contribuições de renomados matemáticos, como Gottfried Leibniz. A literatura sobre cálculo fracionário tem se expandido significativamente, consolidando sua relevância em diferentes domínios científicos. Pesquisadores como Oldham e Spanier (1974), Podlubny (1999) e Kilbas (2006) aprofundaram as bases teóricas desse campo, formalizando definições rigorosas e aplicabilidades práticas. Estudos recentes demonstram que as equações diferenciais fracionárias são fundamentais na descrição de fenômenos com memória e efeitos de hereditariedade, sendo amplamente utilizadas na física estatística, matemática e em sistemas financeiros. Entre os diversos métodos do cálculo fracionário, as derivadas de Caputo se destacam por sua capacidade de manejar integrais e derivadas de ordens arbitrárias, incluindo ordens racionais. Essas derivadas são especialmente valiosas na modelagem de sistemas que incorporam memória e a influência de estados passados, proporcionando uma descrição mais precisa e realista de fenômenos complexos e dinâmicos. Conforme sugerido por Diethelm (2010), as propriedades das derivadas de Caputo facilitam a formulação de condições iniciais em problemas de valor inicial, tornando-as mais adequadas para aplicações físicas e financeiras. Neste trabalho, realiza-se um estudo aprofundado sobre os mecanismos de resoluções no cálculo fracionário, com enfoque nas aplicações das derivadas e integrais de Caputo. Assim, buscamos explorar suas propriedades, métodos analíticos e compreensão em diferentes contextos, visando demonstrar como essas abordagens podem enriquecer a modelagem de fenômenos complexos em diversas áreas do conhecimento, tais como: física, matemática, química e, em especial, economia.

MATERIAIS E MÉTODOS:

As equações diferenciais de ordem não inteira, abordadas pelo cálculo fracionário, surgem como uma ferramenta matemática poderosa para modelagem de sistemas complexos. Assim, o presente trabalho fundamenta-se em uma abordagem teórica, apoiada em revisão bibliográfica de livros e artigos especializados em cálculo fracionário e equações diferenciais. Como principal referencial matemático, adota-se a formulação proposta pela literatura de Michele Caputo (1969), amplamente aceita por sua capacidade de generalizar o cálculo clássico e preservar de forma consistente as condições iniciais em sistemas complexos. Os materiais utilizados consistem em fontes acadêmicas estabelecidas, incluindo artigos científicos de periódicos indexados, teses e obras de referência que abordam tanto os fundamentos quanto as aplicações do cálculo fracionário em sistemas físicos, financeiros e de engenharia. Complementarmente, empregaram-se ferramentas matemáticas clássicas, como a função Gama, a derivada fracionária de Caputo e a integral fracionária associada, além da Transformada de Laplace, utilizada para a conversão de equações diferenciais em expressões algébricas mais manejáveis. O método de trabalho compreendeu três etapas principais: (i) levantamento e análise da literatura relevante, priorizando estudos que consolidaram as definições formais da base do cálculo fracionário; (ii) sistematização das formulações matemáticas centrais, com destaque para a derivada de Caputo, bem como suas propriedades; (iii) exploração das aplicações por meio de modelagem conceitual e análise comparativa, ressaltando as vantagens do formalismo fracionário em relação às equações diferenciais clássicas. Assim, este estudo pauta-se em um procedimento essencialmente analítico, cujo objetivo é evidenciar o potencial do cálculo fracionário como ferramenta de modelagem para fenômenos de natureza complexa, destacando suas implicações teóricas e interdisciplinares.

RESULTADOS E DISCUSSÃO:

Em termos gerais, é notório o papel fundamental do cálculo fracionário como uma ferramenta matemática essencial para a resolução de sistemas complexos, especialmente em contextos nos quais as equações diferenciais de ordem inteira não oferecem uma análise suficientemente abrangente e precisa. Essa abordagem promissora permite modelar fenômenos dinâmicos com maior fidelidade, incorporando efeitos de memória e hereditariedade que frequentemente desempenham um papel crucial na evolução de determinados sistemas como um todo. Dessa forma, a utilização das equações diferenciais fracionárias, particularmente aquelas formuladas por meio da derivada de Caputo, proporciona um avanço significativo na análise e na compreensão de sistemas dinâmicos complexos, resultando em previsões mais precisas e representações matemáticas mais realistas da realidade observada. Por outro lado, obtivemos equações satisfatórias em termos de físico-química e, especialmente, em um modelo teórico acerca da econofísica, na qual utilizamos a equações de Black-Scholes e introduzimos os conceitos da derivada de Caputo para almejarmos melhor análise dos resultados. Vale ressaltar, que o modelo ainda não foi colocado em prática, pois precisamos encontrar uma expressão que descreveria de modo competente a volatilidade, onde a mesma mede a dispersão dos retornos de um ativo ao longo do tempo, refletindo seu risco e incerteza. É essencial na precificação de opções, no gerenciamento de risco e na modelagem de séries financeiras

CONCLUSÕES/CONSIDERAÇÔES:

Por meio do cálculo fracionário, é possível visualizar determinados problemas com mais precisão, pois ele nos permite uma melhor abordagem dos sistemas físicos, visando assim obter resultados mais exatos na modelagem de fenômenos naturais, como no caso do decaimento radioativo e em expressões que descrevem o sistema financeiro e operações de um ativo. Além disso, é evidente que a generalização do cálculo proporcionou uma nova perspectiva em situações sofisticadas onde a matemática clássica falha em resolver problemas. Dessa forma, podemos observar sua real importância ao trabalhar com sistemas financeiros, nos quais estudos recorrentes podem ser conduzidos com o objetivo de uma avaliação mais precisa das possíveis variações que o mercado pode apresentar Portanto, será possível trabalhar com a derivada fracionária de Caputo, que oferece uma maneira eficiente de incorporar a memória de longo prazo nos modelos financeiros, melhorando a precisão na precificação de opções e na avaliação de riscos, além de possibilitar estudos de commodities, tais como as variações do preço de mercado do Café. Conclui-se que o cálculo fracionário constitui hoje um campo consolidado e em constante expansão, não apenas pela relevância teórica na matemática e na física, mas também por seu potencial como ferramenta sofisticada de modelagem de sistemas complexos. Além disso, a natureza não local e a capacidade de incorporar efeitos de memória conferem a essa área do conhecimento um caráter singular, permitindo descrever fenômenos que não podem ser satisfatoriamente tratados pelos métodos diferenciais tradicionais. Este trabalho, ao longo de seu desenvolvimento, permitiu extrair observações relevantes e aprofundar a compreensão sobre o tema, evidenciando que os resultados alcançados são parte de um processo contínuo de evolução e aprimoramento científico. Vale ressaltar que sua ampla aplicabilidade, somada ao desenvolvimento contínuo de novas metodologias, algoritmos e interpretações, torna-o um campo promissor, cujas possibilidades seguem se expandindo e modernizando a cada dia, acompanhando os desafios impostos pela crescente complexidade dos problemas científicos e tecnológicos contemporâneos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

1. CAMARGO, R. d. F.; OLIVEIRA, E. C. Cálculo Fracionário. São Paulo: Livraria da Física, 2015

2. Podlubny, I. (1999). Fractional Differential Equations. Academic Press.

3. ainardi, F. (2010). Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity. World Scientific.

4. BUTKOV, E.; BOSCOJ, F. Física Matemática. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1988.

5. COLLINS, K. E.; JARDIM, I.; COLLINS, C. O que é césio-137. Química nova,v.11,1988. Disponível em: http://static.sites.sbq.org.br/quimicanova.sbq.org.br/pdf/Vol11No2169v11n2

6. OLDHAM, K. B.; SPANIER, J. The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order. New York: Academic Press, 1974.

7. PODLUBNY, I. Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1999.

8. KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. theory and Applications of Fractional Differential Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.

9. DIETHELM, K. The Analysis of Fractional Differential Equations: An ApplicationOriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Heidelberg: Springer, 2010.

10. Areepong, Yupaporn; Peerajit, Wilasinee. Integral equation solutions for the average run length for monitoring shifts in the mean of a generalized seasonal ARFIMAX(P, D, Q, r)s process running on a CUSUM control chart. PLOS ONE, v. 17, n. 2, p. e0264283, 2022. DOI: 10.1371/journal.pone.0264283