

CONJUNTOS CANÔNICOS PARA SISTEMAS COM MASSA DEPENDENTE DA POSIÇÃO: UMA ABORDAGEM SUPERESTATÍSTICA

Matheus Gabriel Alves Santos¹, Ronaldo Silva Thibes², Ignacio Sebastián Gomez³

RESUMO

Este trabalho investiga a formulação de conjuntos canônicos para sistemas com massa dependente da posição (PDM), aplicando conceitos de superestatística e estatísticas não extensivas de Tsallis e Kaniadakis. A pesquisa revisou os fundamentos da mecânica estatística e das funções de partição, identificando as modificações necessárias quando a massa efetiva varia espacialmente. Foram utilizadas operações algébricas deformadas, análises teóricas e simulações numéricas com Wolfram Mathematica. Obtiveram-se expressões para funções de partição canônicas em diferentes potenciais e deduziram-se funções termodinâmicas fundamentais. Os resultados indicaram que a dependência espacial da massa altera significativamente a pressão, entropia e energia interna, especialmente em sistemas confinados. A equivalência entre o gás harmônico com PDM quadrática e o gás ideal tridimensional destaca a robustez do método. As estatísticas de Tsallis e Kaniadakis mostraram-se adequadas para capturar correções entrópicas, evidenciando que os índices entrópicos atuam como parâmetros de deformação. Conclui-se que a abordagem proposta amplia as perspectivas para o estudo de sistemas complexos em física da matéria condensada, plasmas e astrofísica.

PALAVRAS-CHAVE: estatística não extensiva, função de partição, massa dependente da posição, superestatística, termodinâmica

TITLE

CANONICAL ENSEMBLES FOR POSITION-DEPENDENT MASS SYSTEMS: A SUPERSTATISTICAL APPROACH

ABSTRACT

This work investigates the formulation of canonical ensembles for position-dependent mass (PDM) systems, applying superstatistics and nonextensive statistics of Tsallis and Kaniadakis. We reviewed statistical mechanics foundations and partition functions, identifying necessary modifications for spatially varying masses. Deformed algebraic operations, theoretical analyses, and numerical simulations using Wolfram Mathematica were employed. Canonical partition functions under different potentials and fundamental thermodynamic functions were derived. Results show that spatial mass dependence significantly modifies pressure, entropy, and internal energy, especially in confined systems. The equivalence between the quadratic PDM harmonic gas and the tridimensional ideal gas highlights the method's robustness. Tsallis and Kaniadakis statistics effectively captured entropic corrections, confirming entropic indices as

deformation parameters. This approach broadens perspectives for studying complex systems in condensed matter physics, plasmas, and astrophysics.

KEYWORDS: nonextensive statistics, partition function, position-dependent mass, superstatistics, thermodynamics

INTRODUÇÃO

A superestatística é uma extensão da mecânica estatística voltada para sistemas fora do equilíbrio e não lineares, onde variáveis intensivas, como temperatura, flutuam ao longo do tempo e do espaço. A média sobre essas flutuações gera estatísticas generalizadas, incluindo a de Tsallis, permitindo descrever fenômenos como turbulência, física de plasma e distribuições supratérmicas (Beck e Cohen, 2009)

Na mecânica estatística, o conjunto canônico descreve sistemas em equilíbrio térmico que trocam energia com um reservatório, mantendo volume e número de partículas constantes. A função de partição é central nesse formalismo, permitindo derivar propriedades como energia interna, entropia e capacidade térmica, com base na distribuição de Boltzmann.

Sistemas com massa dependente da posição (PDM) surgem em contextos como semicondutores, física nuclear e meios não homogêneos, exigindo modificações na equação de Schrödinger e nas integrais estatísticas. A formulação canônica para esses sistemas requer redefinir a densidade de estados e ajustar a função de partição, garantindo coerência termodinâmica. Métodos como transformações canônicas e ajustes na métrica do espaço de fase têm sido aplicados para acomodar essa complexidade (Costa *et al*, 2021)

Esses estudos são relevantes para sistemas nanoscópicos, física de plasmas e astrofísica, onde variações na massa efetiva afetam diretamente propriedades termodinâmicas (Huang, 1997)

O objetivo é investigar conjuntos canônicos para sistemas PDM no contexto da superestatística e das estatísticas de Tsallis e Kaniadakis, analisando alterações nas funções de partição e nas propriedades termodinâmicas por meio de métodos analíticos, formalismos deformados e simulações numéricas.

MATERIAIS E MÉTODOS

2.1 Materiais

Foram utilizadas operações aritméticas deformadas, equações mestras, soluções analíticas, equações de difusão e simulações numéricas no software Wolfram Mathematica. O formalismo das estatísticas de Tsallis e Kaniadakis foi aplicado aos conjuntos canônicos com massa dependente da posição (PDM).

2.2 Método

A pesquisa foi dividida em quatro etapas principais. A primeira foi o levantamento bibliográfico, realizado com base em livros, artigos, dissertações e teses

acadêmicas, com o objetivo de reunir informações teóricas relevantes, mapear avanços anteriores e identificar lacunas na literatura.

Na segunda etapa, foi feita uma revisão aprofundada do conjunto canônico, explorando obras fundamentais e abordagens tradicionais e modernas da mecânica estatística. Isso permitiu compreender a evolução do conceito e sua aplicação em diferentes contextos físicos.

A terceira fase focou na teoria das funções de partição, fundamentais para descrever propriedades estatísticas dos sistemas físicos. Foram analisadas suas principais propriedades matemáticas e aplicações, com ênfase na conexão com os modelos de estudo.

A etapa final envolveu o estudo detalhado dos sistemas com massa dependente da posição, presentes em contextos como semicondutores e sistemas não homogêneos. Foram analisados modelos teóricos que descrevem a variação da massa com a posição, bem como os impactos dessa variação em equações diferenciais e no comportamento dinâmico dos sistemas.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A pesquisa estabeleceu conexões formais entre sistemas com massa dependente da posição (PDM) e o formalismo da superestatística, organizando os principais resultados em três eixos: (i) dedução das funções de partição; (ii) implicações termodinâmicas; e (iii) relações com estatísticas não extensivas. No primeiro eixo, foram obtidas expressões analíticas para funções de partição canônicas em diferentes potenciais efetivos, como o gás ideal PDM, o PDM quadrático e o exponencial em potencial harmônico. Verificou-se que, com uma correspondência adequada entre massa e potencial, a superestatística reproduz a função de partição convencional. No segundo eixo, derivaram-se funções termodinâmicas como energia livre, entropia, energia interna, capacidade térmica e pressão. A massa variável introduz correções significativas nessas funções, especialmente em regimes de confinamento, afetando a acessibilidade dos estados. O terceiro eixo mostra que os índices entrópicos de Tsallis e Kaniadakis funcionam como parâmetros de deformação, oferecendo uma estrutura natural para descrever sistemas PDM e generalizando a estatística de Boltzmann-Gibbs. As figuras ilustram esses efeitos:

a Figura 1 mostra que a pressão nos modelos de Tsallis e Kaniadakis é menor;

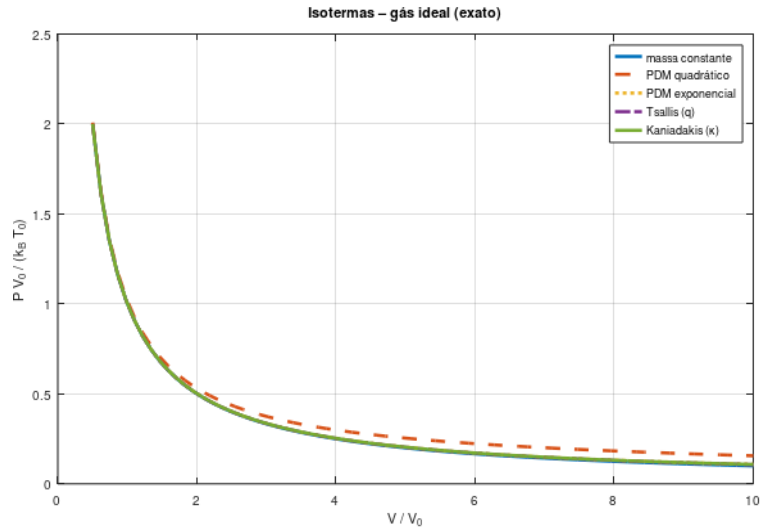


Figura 1:Gráfico isotermico gás ideal

Figura 2 aponta redução da entropia;

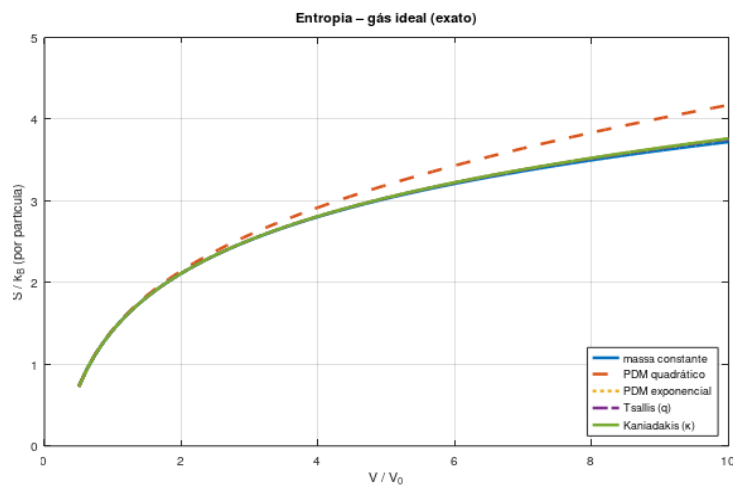


Figura 2:Gráfico entropia gás ideal

Conclui-se que a massa variável modifica profundamente o comportamento termodinâmico, sendo a superestatística um formalismo eficaz para descrever tais sistemas.

CONCLUSÕES/CONSIDERAÇÕES

Neste trabalho, propomos uma nova abordagem para obter funções de partição canônicas em sistemas unidimensionais com massa dependente da posição (PDM), utilizando uma função delta centrada em uma temperatura inversa local para representar flutuações térmicas. A metodologia estabelece uma conexão entre superestatística e sistemas com massa efetiva variável, estendendo a aplicação de estatísticas não extensivas no formalismo canônico.

Os resultados indicam que, embora as estatísticas de Tsallis e Kaniadakis alterem a distribuição espacial das partículas — afetando o volume efetivo do sistema

—, as expressões para a energia interna e o calor específico coincidem com as obtidas via estatística de Maxwell-Boltzmann. Em contrapartida, perfis de massa não homogêneos levam à redução da pressão média, interpretada como resposta à variação local da inércia.

Também demonstramos a equivalência termodinâmica entre o gás de oscilador harmônico com PDM quadrática e o gás ideal tridimensional, destacando a robustez do método. Esses achados ampliam a compreensão sobre sistemas com propriedades espaciais não triviais, com implicações para o estudo de materiais complexos, meios efetivos e sistemas com simetrias quebradas.

Como perspectiva futura, propõe-se a extensão da abordagem para sistemas multidimensionais, com a inclusão de potenciais externos não clássicos e efeitos quânticos, a fim de explorar novas fronteiras na descrição estatística de sistemas com massa variável.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BECK, C.; COHEN, E. G. D. Superstatistics. *Physica A*, 322:267-275, 2003.
2. COSTA, B. G.; GOMEZ, I. S.; PORTESI, M. κ -Deformed quantum and classical mechanics for a system with position-dependent effective mass. *Journal of Mathematical Physics*, 61(8), 2020.
3. FERREIRA, J. S.; ALVES, P. R.; SILVA, M. A. Propriedades estatísticas de sistemas com massa variável. *Journal of Statistical Physics*, 190:500-520, 2019.
4. HUANG, K. *Statistical Mechanics*. 2. ed. New York: Wiley, 1987.
5. TSALLIS, C. *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics*. New York: Springer, 2009.