UM ESTUDO SOBRE TEOREMAS CLÁSSICOS DA ANÁLISE FUNCIONAL: TEOREMA DA APLICAÇÃO ABERTA E DO GRÁFICO FECHADO.

Eduardo Tavares Freire 1[1], Lucas Venâncio Da Silva Santos 2[2]

RESUMO

O Teorema da Aplicação Aberta (TAA) é um dos teoremas clássicos da Análise Funcional. Ele garante que se um operador linear é definido entre dois espaços de Banach e esse é contínuo e sobrejetor, então o operador é uma aplicação aberta. Para o (TAA), a sobrejetividade do operador é essencial, pois toda aplicação linear aberta entre espaços normados é necessariamente sobrejetora. Outro resultado clássico é o Teorema do Gráfico Fechado (TGF) que, para espaços de Banach em um operador linear contínuo, tem seu gráfico fechado, valendo também a recíproca sob as mesmas hipóteses. Temos, portanto, como objetivo abordar um estudo sobre todas as definições e teoremas principais que contribuem para compreender estes resultados importantes. É relevante ressaltar que apresentaremos apenas uma introdução destes teoremas importantes para o estudo de operadores com aplicações clássicas presentes no estudo da Análise Funcional, comentando sobre estes exemplos e implicações desses teoremas nos respectivos exemplos. Por meio de uma metodologia qualitativa, e com base em referenciais teóricos que abordam definições e teoremas importantes para os estudos da Análise Funcional e de Operadores. Finalmente, abrangendo todos esses tópicos, queremos trazer exemplos de aplicações, comentar com compreensibilidade sobre os teoremas, abordar os pesquisadores que contribuíram para o (TAA) e o (TGF), verificando a importância desses teoremas para os estudos da Análise Funcional.

PALAVRAS-CHAVE: ANÁLISE, ÁLGEBRA LINEAR, APLICAÇÕES LINEARES

ABSTRACT

The Open Mapping Theorem (OMT) is one of the classical theorems in Functional Analysis. It states that if a linear operator is defined between two Banach spaces and is continuous and surjective, then the operator is an open mapping. For the OMT, the surjectivity of the operator is essential, since every open linear mapping between normed spaces is necessarily surjective. Another classical result is the Closed Graph Theorem (CGT), which states that for a linear operator between Banach spaces, if the operator is continuous then its graph is closed, with the converse also holding under the same hypotheses. Therefore, our objective is to conduct a study of all the main definitions and theorems that contribute to the understanding of these important results. It is relevant to emphasize that we will present only an introduction to these important theorems for the

[1]Professor mestre assistente coordenador do projeto de iniciação científica e vinculado ao departamento de ciências exatas e tecnológicas-DCET

[2]Graduando em Licenciatura em Matemática; Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia; eduardotav18@gmail.com; http://lattes.cnpq.br/8148442334365175;

study of operators, with classical applications found in Functional Analysis, discussing examples and implications of these theorems in their respective contexts. Through a qualitative methodology, and based on theoretical references that address important definitions and theorems for the study of Functional Analysis and Operators, we aim to cover all these topics, provide application examples, offer clear explanations of the theorems, and discuss the researchers who contributed to the OMT and the CGT, thereby verifying the importance of these theorems for the study of Functional Analysis.

KEYWORDS: ANALYSIS, LINEAR ALGEBRA, LINEAR MAPPINGS

INTRODUÇÃO

A Análise Funcional, consolidada como um dos pilares da matemática do século XX, eleva os conceitos do Cálculo e da Álgebra Linear a contextos de dimensão infinita, fornecendo uma estrutura forte para a investigação de espaços de funções e operadores. Nesse cenário, dois teoremas se destacam pela sua profundidade e utilidade: o Teorema da Aplicação Aberta (TAA) e o Teorema do Gráfico Fechado (TGF). Esses resultados não são apenas peças de interesse teórico; eles são ferramentas fundamentais que garantem propriedades essenciais dos operadores lineares, permitindo a análise de problemas em equações diferenciais, teoria da aproximação e mecânica quântica, entre outros.

MATERIAIS E MÉTODOS

O Teorema da Aplicação Aberta é mais um resultado famoso da Análise Funcional, devido a Banach (1929), e garante que se E e F são espaços de Banach, então todo operador linear contínuo e sobrejetor $T: E \longrightarrow F$ é uma aplicação aberta, isto é, $T(A)$ é aberto em F sempre que A for aberto em E.

Definição 1.1 Uma aplicação $T: E \rightarrow F,$ onde E *e* F são espaços normados, é uma aplicação aberta se $T(A)$ é um aberto em F sempre que A é um aberto em E.

Exemplo 1.1 A aplicação $T: R \rightarrow R$ dada por $T(x) = 2x$ tal que $x \in \mathbb{R}$, é aberta. Pois a transformação leva de intervalo Aberto em Aberto. Ou seja, $T((-1,1)) = (-2,2)$.

Teorema 1.1 (Teorema da Aplicação Aberta). Sejam E e F espaços de Banach. Se $T: E \rightarrow F$ é uma aplicação linear, sobrejetiva e contínua, então T é aberta.

Exemplo 1.2 Seja X um espaço de Banach (espaço normado completo) e considere o operador, Identidade. Que leva o elemento nele mesmo.

$$I: X \to X, \qquad I(x) = x$$

Pelo *Teorema da Aplicação Aberta*, as hipóteses são; I seja linear, seja contínuo, seja sobrejetivo e que os espaços sejam espaços de Banach.

Linearidade

$$Para\ quaisquer\ x, y \in \ \ e\ \alpha, \beta \in R\ (ou\ C):$$

$$I(\alpha x + \beta y) = \alpha x + \beta y = \alpha I(x) + \beta I(y)$$

Continuidade

$$I(x)\ \|_x = \|\ x\ \|_x$$

De fato, é contínuo, pois o operador é limitado, $\|\ I(x)\ \| \leq 1 \cdot \|\ x\ \|\ \ para\ todo\ x \in X, logo.$ A aplicado é continua uniformemente. O que faz dela continua.

Sobrejetividade

$$Para\ todo\ y \in X, existe\ x = y \in X,\ tal\ que\ I(x) = y.$$

Podemos dizer que é direta pela natureza do operador; pois leva do elemento a ele mesmo. Da mesma forma a aplicação é de Banach direto pois, X é de Banach por hipótese.

A grande utilidade do *Teorema do Gráfico Fechado* reside na seguinte observação: para mostrar a continuidade de um operador $T : E \longrightarrow F$ (linear ou não) via definição, devemos provar que, para toda sequência convergente $xn \longrightarrow x$ em $E,$ é verdade que:

$$T(xn) \longrightarrow T(x)\ em\ F$$

No entanto, quando trabalhamos com operadores lineares entre espaços de Banach, o Teorema do Gráfico Fechado nos oferece uma alternativa poderosa. Em vez de verificar a continuidade diretamente, podemos verificar que o gráfico do operador é fechado.

Definição 1.2 Sejam E e F espaços normados e $T: E \to F$ uma aplicação. Definimos o *gráfico* de T como o conjunto:

$$Graf(T) = \{(x, y) \in E \times F; y = T(x)\}..$$

Em outras palavras,

$$Graf(T) = \{(x, T(x)); x \in E\}. Graf(T) = \{(x, T(x)); x \in E\}.$$

Teorema 1.2 (Teorema do Gráfico Fechado). Sejam E, F espaços de Banach e $T: E \to F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, $G(T)$ é fechado em $(E \times F)$.

Exemplo 1.3 Considere $X = R$ com norma usual e $T: R \to R$, $T(x) = cx$, tal que (c é constante).

Pelo Teorema do Gráfico Fechado; Seja o Gráfico.

$$G(T) = \{(x, cx) \mid x \in R\} G(T) = \{(x, cx) \mid x \in R\} \quad (reta\ no\ plano)$$

Tome uma sequência

$(x_n, T(x_n)) = (x_n, cx_n)$ no gráfico $G(T)$. Suponha que $(x_n, cx_n) \to (x, y)$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$$x_n \to x$$
$$cx_n \to cx = y$$

$Logo,\ (x, y) \in G(T)\ \Rightarrow\ gráfico\ fechado\ \Rightarrow T\ contínuo,\ Pelo\ teorema.$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este trabalho tem como objetivo principal realizar um estudo aprofundado sobre o Teorema da Aplicação Aberta (TAA) e o Teorema do Gráfico Fechado (TGF), adotou-se uma metodologia qualitativa, baseada em revisão bibliográfica de referenciais teóricos consolidados, com foco na compreensão das estruturas matemáticas que fundamentam esses teoremas, suas equivalências e implicações. Em seguida, buscamos explorar as equivalências dos Teoremas, destacando como o TAA e o TGF se relacionam entre si e com outros resultados fundamentais. Por fim, interpretam-se as implicações desses resultados fundamentais, tanto do ponto de vista teórico quanto por meio de exemplos clássicos de aplicação.

CONCLUSÕES/CONSIDERAÇÔES

A realização deste trabalho permitiu-nos alcançar um entendimento aprofundado de dois teoremas fundamentais da Análise Funcional, neste estudo buscamos trazer para a graduação Teoremas que apenas são vistos em mestrados ou doutorados, com o objetivo de propor uma organização diferente que chegue a níveis de graduação. A confecção deste estudo está atrelada a um Trabalho e de Conclusão de Curso, importante não apenas pela formalização acadêmica, mas também pela conquista intelectual de explorar temas que transcendem o currículo usual da graduação. A análise de exemplos e aplicações foi essencial para evidenciar que não podemos enfraquecer as hipóteses desses teoremas sem comprometer sua validade. Por fim, este trabalho não apenas sintetiza e explica resultados clássicos, mas também abre portas para estudos futuros, como a investigação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BERNI, Jean Cerqueira. **Espaços Métricos.** Notas de aula-USP, São Paulo, 2021.

BOTELHO, Geraldo; PELLEGRINO, Daniel; TEIXEIRA, Eduardo. **Fundamentos de análise funcional**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

BAZÁN, Aldo; PEREIRA, Alex Farah; DE SOUZA FERNANDEZ, Cecília. **Introdução aos espaços de Banach.** Rio de Janeiro: Editora do IMPA, 2023.

KREYSZIG, Erwin. **Introductory functional analysis with applications**. New York: John Wiley & Sons, 1991.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise, v. 1**. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise vol. 2**. Rio de Janeiro: Projeto Euclides IMPA, 2009.

LIMA, Elon Lages. **Elementos de topologia geral**. São Paulo: Ao Livro Técnico, Editôra da Universidade de São Paulo, 1970.

LIMA, Elon Lages. **Espaços métricos.** v. 4. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1983.

RUDIN, Walter. **Principles of mathematical analysis**. New York: McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1976.